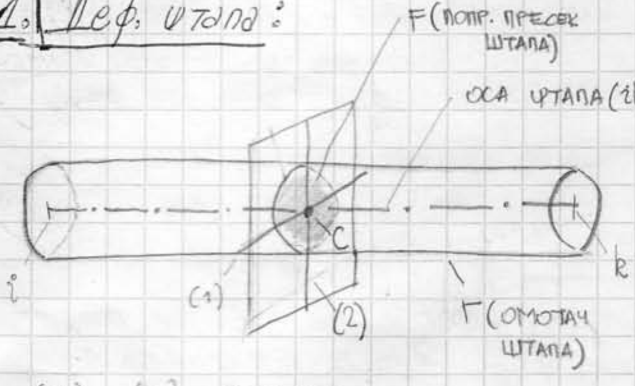
~ Списак питања за I колоквијум из Статике к-ја

1. Деф. штапа:



(1), (2) - г.у.о.ч.

ik - глатка равна или просторна крива линија

- Димензија шрафиране површине мала у односу на дужину осе штапа ik и полупречник кривине штапа.

- Штап је г.м.т. које описује крива Г и површ F у тачкама i и k.

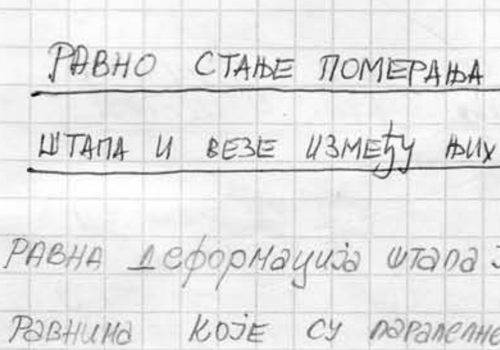
Подела: → прави ш. / криви ш.; → константног поп. пр. / променљивог поп. пр. → раван ш. (оса ik са (1) v (2) леже у истој равни) / просторни штапови

Равно стање померања штапа; претпоставке, компоненте померања тачака осе штапа и везе између њих:

Равна деформација штапа је деформ. једног равног ш. чије се тачке померају у равнима које су паралелне са равни штапа.

Равна деформ.: Све тачке на прави управној на раван штапа се померају исто.

Бернулијева хип.: Попречни пресеци штапа се не деформишу и при деформ. остају равни и управни на деформ. осу штапа.
↓ основна прет. техничке теорије савијања штапа
→ важи тачно за праве призм. ш. оптерећене на чисто савијање, ако постоји осим Ms и T онда се поп. пресеци витопере (нису више ⊥ на деф. осу ш.)



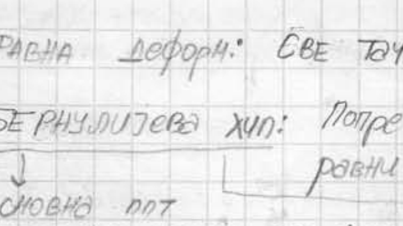
$u = \xi\cos\alpha - \eta\sin\alpha \qquad v = \xi\sin\alpha + \eta\cos\alpha$

$\xi = u\cos\alpha + v\sin\alpha \qquad \eta = v\cos\alpha - u\sin\alpha$

$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha \cdot \cos\beta \pm \cos\alpha \cdot \sin\beta$

$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta \mp \sin\alpha \cdot \sin\beta$

↓ (2) питање



$dx + du = (1+\varepsilon)ds\cos(\alpha+\varphi) \qquad dy + dv = (1+\varepsilon)ds\sin(\alpha+\varphi)$

Прет. о малим деформ.: померања, обртања и деформ. величине ш. су тако мале да квадрате и више степене тих величина као и квадр. и више степене њихових извода можемо занемарити.

$\cos\varphi = 1 \quad \sin\varphi = \varphi \quad \cos(\alpha+\varphi) = \cos\alpha - \varphi\sin\alpha$

$\sin(\alpha+\varphi) = \sin\alpha + \varphi\cos\alpha \qquad \varepsilon \cdot \varphi = 0$

$du = \varepsilon ds\cos\alpha - \varphi ds\sin\alpha \quad dv = \varepsilon ds\sin\alpha + \varphi ds\cos\alpha$

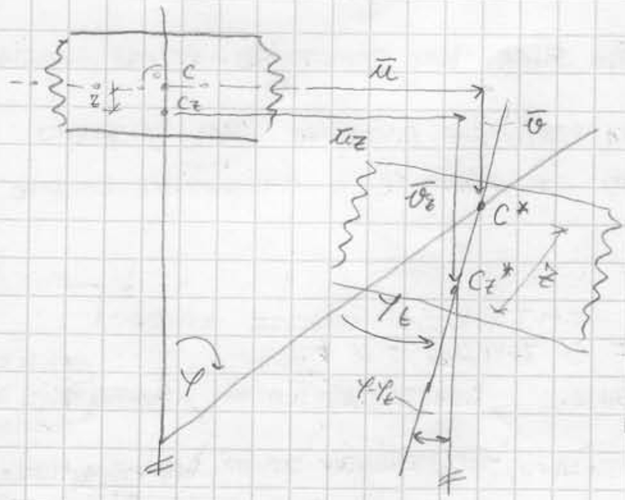
$dx = ds\cos\alpha$

$dy = ds\sin\alpha$

$$\boxed{\begin{aligned} du &= \varepsilon dx - \varphi dy \\ dv &= \varepsilon dy + \varphi dx \end{aligned}}$$

Прет. о геом. линеарности проблема!
(1. основна прет. теорије к-ја)

Извести изразе за компоненте померања тачке на одстојању z од осе штапа у теорији малих деформ. и обрт.



$\bar u_z = \bar u - z\sin(\varphi-\psi_t)$ $\quad \bar v_z + z = \bar v + z\cos(\varphi-\psi_t)$

$\gamma \sim \psi_t$ - клизање попр. пресека (промена правог угла између попр. пресека и осе штапа)

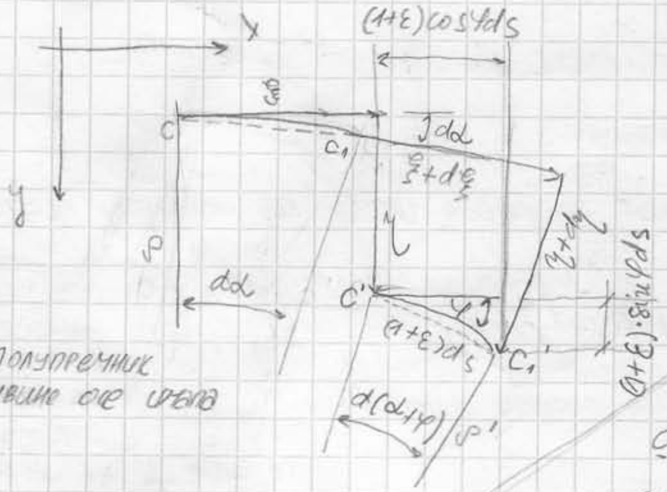
$\varphi-\psi_t$ - угао обртања попречног пресека

Теорија малих деф. $\Rightarrow$ $\sin(\varphi-\psi_t) = \varphi-\psi_t$, $\cos(\varphi-\psi_t) = 1$

$$\boxed{\begin{aligned}\bar u_z &= \bar u - z(\varphi-\psi_t)\\ \bar v_z &= \bar v\end{aligned}}$$

Померања неке тачке поп. пр. у случају малих деф.

2. Извести изразе за компоненте померања тачака осе штапа у функцији деформ. величина елемента осе штапа у теорији великих деформ. и теорији малих д. и обрт. у сталном коор. систему.



ρ - полупречник кривине осе штапа

- Везе деформ. величина и померања ξ и η добијамо из услова да је разлика пројекције елемента $C'C_1'$ и елемента CC_1 у правцу тангенте и у правцу нормале на осу штапа у тачки C једнака разлици пројекције померања тачке C_1 и тачке C у правцу тангенте и у правцу нормале

$$(1+\varepsilon)\cos\varphi\, ds - ds = (\xi+d\xi)\cos d\alpha - (\eta+d\eta)\sin d\alpha - \xi$$

$$(1+\varepsilon)\sin\varphi\, ds = (\xi+d\xi)\sin d\alpha + (\eta+d\eta)\cos d\alpha - \eta$$

$\cos d\alpha = 1 \quad \sin d\alpha = d\alpha \quad \frac{d\alpha}{ds} = \frac{1}{\rho}$

Занемарено производе диференц. величина, ове једн. поделимо са ds:

$$\left.\begin{aligned}(1+\varepsilon)\cos\varphi &= 1 + \frac{d\xi}{ds} - \frac{\eta}{\rho}\\ (1+\varepsilon)\sin\varphi &= \frac{\xi}{\rho} + \frac{d\eta}{ds}\end{aligned}\right\}$$ Теорија великих деформација

Теорија малих деф ($\cos\varphi=1$, $\sin\varphi=\varphi$, $\varepsilon\cdot\varphi=0$): $\boxed{\varepsilon = \frac{d\xi}{ds} - \frac{\eta}{\rho} \quad \varphi = \frac{\xi}{\rho} + \frac{d\eta}{ds}}$

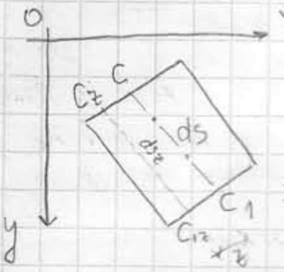
Геом. разлагање померања тачка C_1 и C:

Разлика померања у правцу елемента, εds: $\varepsilon ds = d\xi - \eta\, d\alpha$

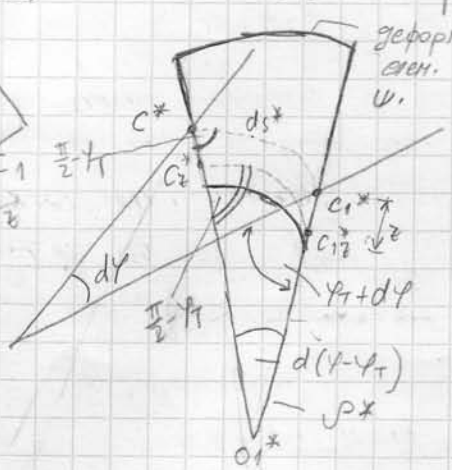
—— || —— управно на правац елемента, φds: $\varphi ds = \xi\, d\alpha + d\eta$

Вишак мајмуне!

3 Извести изразе за дилатацију ε_z, на одстојању z од осе штапа у теорији м.д и н.о.



$ds = ds_z$



Штап претрпи деформацију, искриви се, попречни пресеци у C и C_1 неће бити паралелни.

$$ds^* = (1+\varepsilon)ds \qquad ds_z^* = (1+\varepsilon_z)ds$$

z - остаје z јер пресеци остају равни, нема дилат. дуж попр. пресека

синусна т.:

$\Delta C^* O_1^* C_1^*$ $\qquad$ $\Delta C_z^* O_1 C_{1z}^*$

$$\frac{ds^*}{\sin d(\varphi-\varphi_T)} = \frac{\rho^*}{\sin(\frac{\pi}{2}-\varphi_T)} \qquad \frac{ds_z^*}{\sin d(\varphi-\varphi_T)} = \frac{\rho^*-z}{\sin(\frac{\pi}{2}-\varphi_T)}$$

$$ds^*\cos\varphi_T = \rho^*\sin d(\varphi-\varphi_T)$$

$$ds_z^*\cos\varphi_T = (\rho^*-z)\sin d(\varphi-\varphi_T)$$

$$ds_z^*\cos\varphi_T = ds^*\cos\varphi_T - z\cdot\sin d(\varphi-\varphi_T)$$

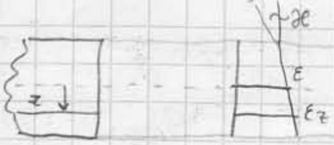
$$\cos\varphi_T \approx 1 \quad \sin d(\varphi-\varphi_T) \approx d(\varphi-\varphi_T)$$

$$(1+\varepsilon_z)ds = (1+\varepsilon)ds - z\,d(\varphi-\varphi_T) \quad /:ds$$

$$\varepsilon_z = \varepsilon - z\frac{d(\varphi-\varphi_T)}{ds}, \qquad \boxed{\kappa = -\frac{d(\varphi-\varphi_T)}{ds}}$$ промена кривине ш.

$$\boxed{\varepsilon_z = \varepsilon + z\kappa}$$

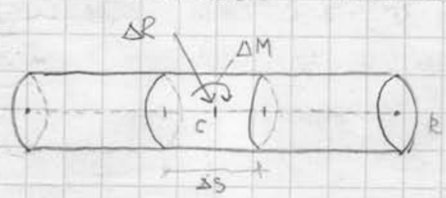
Код правог штапа дилат. по висини поп. пресека ће бити линеарна



3 деформ. величине $\boxed{\varepsilon, \varphi_T, \kappa}$ — описују у потпуности деформацију једног елемента ш.

4 Дефиниција спољ. и унутр. сила код ш.

површинске, запреминске



ΔR - редукциона резултанта свих спољ. сила

ΔM - редук. момент свих спољ. сила

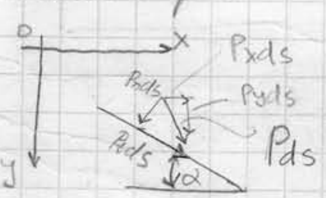
$$\boxed{\vec p = \lim_{\Delta s \to 0}\frac{\Delta R}{\Delta s}} = \frac{dR}{ds}$$ специфична расподељена сила у C

$$\boxed{\vec m = \lim_{\Delta s \to 0}\frac{\Delta M}{\Delta s}} = \frac{dM}{ds}$$ спец. распод. мом. у C

Раван ш. остаје у својој равни ⇒ $\vec p$ и $\vec m$ морају да леже у равни штапа. $\vec m \approx 0$

Оптерећења $\vec p$ и $\vec m$ великог интезитета на кратком делу осе штапа замењујемо резултантама $\vec P$ и $\vec M$

$\vec P$ — концентрисано оптерећење силом; $\vec M$ — конц. опт. моментом



$$\bar P_x ds = P_x dy = P_t ds\cos\alpha - P_n ds\sin\alpha$$

$$\bar P_y ds = P_y dx = P_t ds\sin\alpha + P_n ds\cos\alpha$$

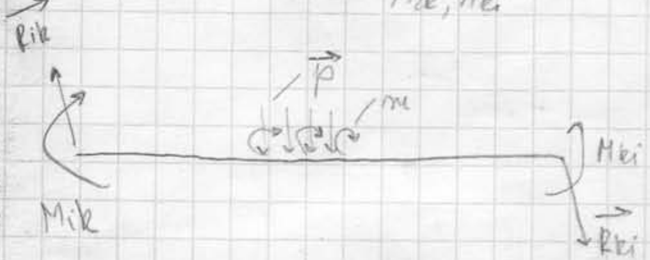
$$dx = ds\cos\alpha \qquad dy = ds\sin\alpha$$

$$\bar P_x = P_x\sin\alpha = P_t\cos\alpha - P_n\sin\alpha$$

$$\bar P_y = P_y\cos\alpha = P_t\sin\alpha + P_n\cos\alpha$$

$\bar P_x, \bar P_y$ - компоненте специфичног оптерећења у правцу координатних оса по јединици дужине осе штапа.

Редукцијом спољ. сила на крајеве штапа i и k добијамо $\vec R_{ik}, \vec R_{ki}$ и M_{ik}, M_{ki}

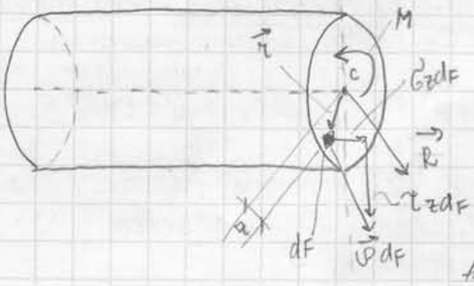


- конзервативне силе (при деформацији не мењају ни величину ни правац ... гравитација)
- неконзервативне силе (при деформацији не мењају величину, али зато мењају правац... хидростатички притисак)

-Унутрашње силе (силе у пресецима):

$\vec{p}$ - тотални напон на елементу површине dF.

$\vec{p}dF$ → укупна елементарна унутрашња сила



Редукцијом $\vec{p}dF$ на тежиште пресека добијамо

$\vec{R}=\int_F \vec{p}\,dF$ $\quad \vec{M}=\int_F (\vec{p}\times\vec{r})\,dF$, раван ш. => $\vec{R}$ и $\vec{M}$ леже у равни

силу $\vec{R}$ разлажемо на компоненту управну на попр. пресек $N=\int_F \sigma_z dF$ и компоненту у равни попречног пресека

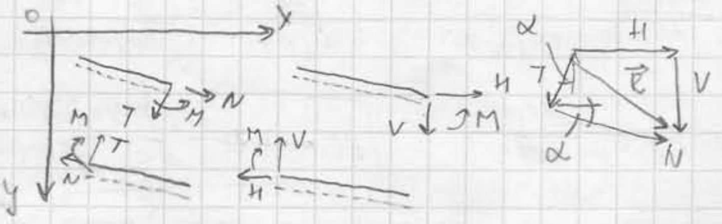
$T=\int_F \tau_z dF$ (трансверзална сила)

нормална сила

$M=\int_F z\sigma_z dF$ - момент савијања

N ⊕ кад затеже штап $\quad M$ ⊕ кад затеже доњу страну штапа

T ⊕ кад врти део који напада у смеру казаљке на сату



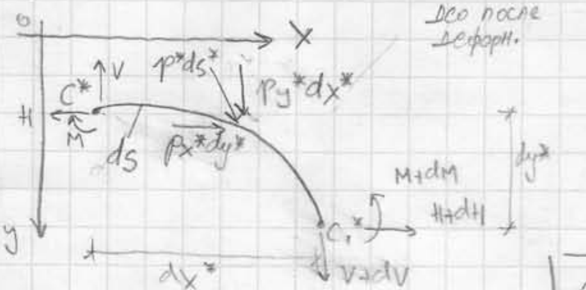
H и V - компоненте силе $\vec{R}$ у правцу x и y

$N = H\cos\alpha + V\sin\alpha \qquad T = V\cos\alpha - H\sin\alpha$

$H = N\cos\alpha - T\sin\alpha \qquad V = N\sin\alpha + T\cos\alpha$

-Услови равнотеже елемента ш. у сталном и локалном коорд. систему:

-Постепено долази до деформације, у сваком тренутку мора постојати равнотежа између спољ. и унутрашњих сила.



Део после деформ.

$ds^*=(1+\varepsilon)ds \quad dx^*=dx+du \quad dy^*=dy+dv$

услови равнотеже на деформ. елементу:

$dH+p_x^*dy^*=0 \quad dV+p_y^*dx^*=0 \quad dM+Hdy^*-Vdx^*=0$

$dH+p_xdy=0 \quad dV+p_ydx=0 \quad dH+H(\underbrace{dy+dv}_{0})-V(\underbrace{dx+du}_{0})=0$

померања мала у односу на величину сила

$p_x^*=p_x \quad p_y^*=p_y$

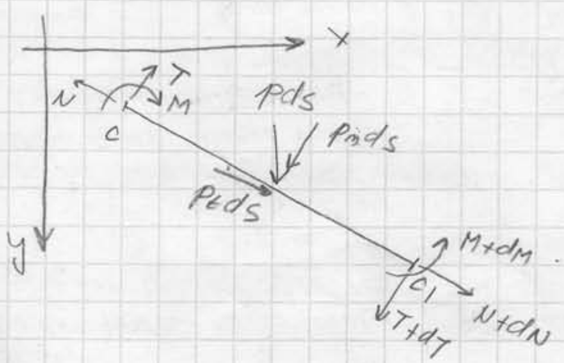
$$\boxed{\begin{aligned} dH+p_xdy&=0\\ dV+p_ydx&=0\\ dM+Hdy-Vdx&=0\end{aligned}}$$

У.Р. елем ш. у сталном коорд. сист. постављају се на недеформ. елементу (линеарне једначине)

овде се јавља проблем: производи двеју непознатих величина => нелинеарне једн. => занемарујемо померања u и v и посматрамо услове равнотеже на елем. пре деформ <=> $\boxed{\text{ПРЕТПОСТАВКА О СТАТИЧКОЈ ЛИНЕАРНОСТИ ПРОБЛЕМА}}$

II основна пп. статике к-ја =>

ППТ О МАЛИМ ПОМЕРАЊИМА



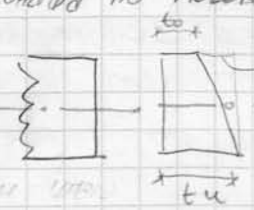
$$\boxed{\begin{aligned} dN+p_t ds&=0\\ dT+p_n ds&=0\\ dH-Tds&=0\end{aligned}}$$

Услови равнотеже у локалном коор. сис.

5. Извести везе нормалне силе N и момента савијања M са деформацијским величинама и температурним променама:

- претпостављамо да се материјал понаша по Хуковом закону (Л. С. И)

$$\varepsilon_z = \frac{\sigma_z}{E} + \alpha_t \cdot t_z \qquad \gamma_z = \frac{\tau_z}{G}$$



$\Delta t = t_u - t_o$ (температурна разлика горњег и доњег влакна)

$$\boxed{t_z^\circ = t^\circ + z\frac{\Delta t}{h}}$$ температура се линеар. мења

температурна промена на растојању z од осе w.

t° - температурна промена осе w.

$$\boxed{\varepsilon_z = \varepsilon + z\varkappa}$$

$$\sigma_z = E\varepsilon_z - E\alpha_t t_z^\circ = E(\varepsilon + z\varkappa) - E\alpha_t\left(t^\circ + z\frac{\Delta t}{h}\right) = E(\varepsilon - \alpha_t t^\circ) + Ez\left(\varkappa - \alpha_t\frac{\Delta t}{h}\right) = \sigma_z$$

$$N = \int_F \sigma_z dF = E(\varepsilon - \alpha_t t^\circ)\int_F dF + E\left(\varkappa - \alpha_t\frac{\Delta t}{h}\right)\int_F z\,dF$$

$$F = \int_F dF \qquad \int_F z\,dF = 0 \qquad \int_F z^2 dF = I$$

$$M = \int_F z\sigma_z dF = E(\varepsilon - \alpha_t t^\circ)\int_F z\,dF + E\left(\varkappa - \alpha_t\frac{\Delta t}{h}\right)\int_F z^2 dF$$

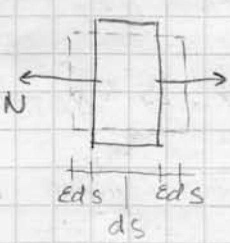
$$N = EF(\varepsilon - \alpha_t t^\circ) \qquad M = EI\left(\varkappa - \alpha_t\frac{\Delta t}{h}\right)$$

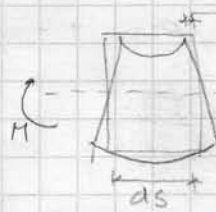
EF - крутост на истезање (аксијална крутост)

EI - крутост на савијање

$$\boxed{\varepsilon = \frac{N}{EF} + \alpha_t t^\circ \qquad \varkappa = \frac{M}{EI} + \alpha_t\frac{\Delta t}{h}}$$

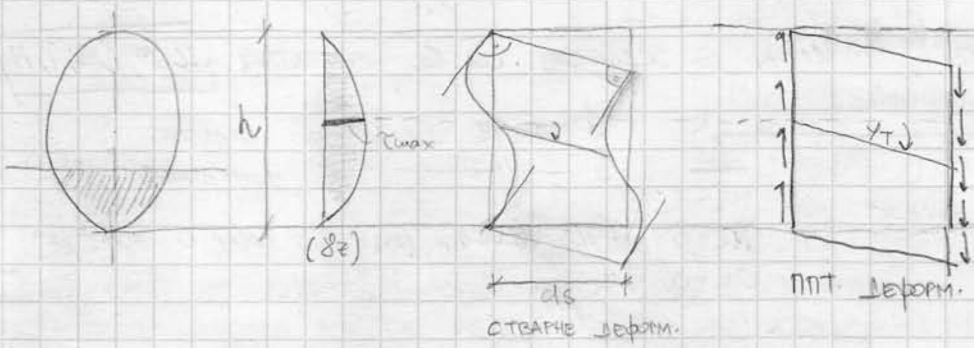
$\varepsilon = \varepsilon(EF)$ $\varkappa = \varkappa(EI)$ - што је w. круће теже је савити





6. Извести везу између трансверзалне силе T и клизања ψ_T:

1. ППТ попречни пресеци остају равни, али окренути за ψ_T



$$\gamma_z = \frac{\tau_z}{G} \qquad \tau_z = \frac{T\,S(z)}{I\,b(z)} \qquad \gamma_z = \frac{T}{GI}\cdot\frac{S(z)}{b(z)}$$

2. ППТ τ напоне пребацујемо у константе по висини попр. пресека.

Рад ствар. нап. τ_z на ств. клизањима = раду ППТ напона на ППТ клизањима!

$$dA = \int_F \tau_z\gamma_z\,ds\,dF = \int_F \frac{\tau_z^2}{G}ds\,dF = ds\frac{T^2}{GF}\cdot\underbrace{\frac{F}{I^2}\int_F\left(\frac{S_z}{b_z}\right)^2 dF}_{k}$$

$$\boxed{k = \frac{F}{I^2}\int_F\left(\frac{S_z}{b_z}\right)^2 dF} = 0{,}2$$ за ▯ пресе

утицај τ нап. на деформ.

зависи само од облика поп. пресека

$$dA = k\frac{T^2}{GF}ds$$

Рад напона смицања при ППТ расподели клизања:

$$d\bar{A} = \int_F \tau_z\psi_T\,ds\,dF = \psi_T ds\int_F \tau_z dF = \psi_T\cdot T\cdot ds$$

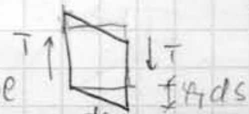
$$dA = d\bar{A} \Rightarrow k\cdot\frac{T^2}{GF}ds = \psi_T\,T\cdot ds \Rightarrow \boxed{\psi_T = k\frac{T}{GF}}$$

$$\boxed{\begin{aligned}\varepsilon &= \frac{N}{EF} + \alpha_t t\\ \varkappa &= \frac{M}{EI} + \alpha_t\frac{\Delta t}{h}\\ \psi_T &= k\cdot\frac{T}{GF}\end{aligned}}$$

веза између основних деформ. величина w. и температурних промена

(усвојили смо линеар. везу између нап. и деформ.)

GF - крутост на смицање



$\psi_T = \psi_T(GF)$

ППТ о физичкој линеарн. проблема

7) Рекапитулација једначина и гранични услови теорије савијања штапа у равни:

I Везе између померања u и v и величина $\varepsilon, \psi, \psi_T$

$$du = \varepsilon dx - \psi dy$$
$$dv = \varepsilon dy + \psi dx$$
$$d(\varphi - \psi_T) = -\varkappa \cdot ds$$

φ ∡ за који се обрне поп. пресек

ППТ о малим деформацијама
(ППТ о геометријској линеарности проблема)

I основна ПП теорије к-ја

φ – ∡ за који се обрне танг. одн норм. на о...
ψ_T – промена прав. угла између поп. пресека и осе ш. ...
угао између поп. пресека и норм. на осу ш. после деформације
ψ_T – позитив. супротно од поз. смера φ

II Услови равнотеже елемента штапа

$$dH + p_x dy = 0$$
$$dV + p_y dx = 0$$
$$dM - V dx + H dy = 0$$

ППТ о статичкој линеарности проблема
(услове равнотеже постављамо на недеформ. конфигурацију)

II основна ПП теорије к-ја
ПП о малим померањима

III Везе између сила у пресецима (M, N, T), температурних промена и разлика и деформацијских величина $(\varepsilon, \varkappa, \psi_T)$

$$\varepsilon = \frac{N}{EF} + \alpha_t t^{\circ}$$
$$\varkappa = \frac{M}{EI} + \alpha_t \frac{\Delta t}{h}$$
$$\psi_T = k \frac{T}{GF}$$

ППТ о материјалној (физичкој) линеарности проблема

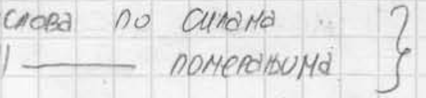
III основна ПП теорије к-ја

$N = H\cos\alpha + V\sin\alpha$
$T = V\cos\alpha - H\sin\alpha$
(H и V изразимо преко N и T)

9 линеарних једначина, 9 непознатих $(u, v, \varphi, N, T, M, \varepsilon, \varkappa, \psi_T)$

III → I ($\varepsilon, \varkappa, \psi_T$ убацујемо горе) ⇒ имамо 6 једначина са 6 непознатих $\boxed{u, v, \varphi, N, T, M}$

статички одређен штап:



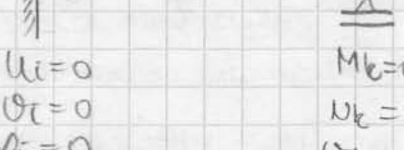
$M_i = 0$, $u_i = 0$, $v_i = 0$

$M_k = 0$, $N_k = 0$, $v_k = 0$

3 гранична услова по силама
3 —"— по померањима
(независно налазимо силе и померања)

статички неодређен штап:

мање од 3 гранична услова по силама
више од 3 —"— померањима
} не можемо наћи независно силе и померања



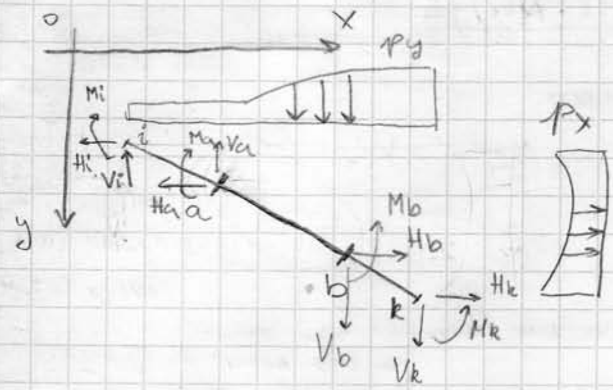
$u_i = 0$, $v_i = 0$, $\varphi_i = 0$

$M_k = 0$, $N_k = 0$, $v_k = 0$

$u_i = 0$, $v_i = 0$, $\varphi_i = 0$

$u_k = 0$, $v_k = 0$, $\varphi_k = 0$

8. Услови равнотеже елемента осе ш. У правцима сталног Декартовог коор. с.



$$dH + p_x\,dy = 0$$
$$dV + p_y\,dx = 0$$
$$dM + H\,dy - V\,dx = 0$$
$$\int_a^b$$

Интеграли услова равнотеже и њихово статичко значење:

$$H_b - H_a + \int_a^b p_x\,dy = 0$$
$$V_b - V_a + \int_a^b p_y\,dx = 0$$
$$M_b - M_a + \int_a^b H\,dy - \int_a^b V\,dx = 0$$

Статичко значење: Интеграли услова равнотеже елемента штапа између 2 попр. пресека су услови равнотеже дела ш. између тих пресека. (први закључак)

- Равнотежно стање штапа је потпуно одређено кад су поред оптерећења дуж осе ш. познате још и силе у једном попречном пресеку.

Појам статички независних величина ш, опште решење за силе у пресецима штапа:

-Статички независне величине штапа (X_1, X_2, X_3) су 3 величине на крајевима ш. и оне су функције само сила на крајевима штапа.

$$\left.\begin{aligned} X_1 &= X_1(H_{ik}, V_{ik}, M_{ik}, H_{ki}, V_{ki}, M_{ki}) \\ X_2 &= X_2(\text{—''—}) \\ X_3 &= X_3(\text{—''—}) \end{aligned}\right\} (1)$$

услови равнотеже

$$\left.\begin{aligned} & H_{ki} - H_{ik} + \int_i^k p_x\,dy = 0 \\ & V_{ki} - V_{ik} + \int_i^k p_y\,dx = 0 \\ & M_{ki} - M_{ik} + (y_k - y_i)H_{ik} - (x_k - x_i)V_{ik} - \int_i^k p_x (y_k - y)\,dy \\ & + \int_i^k p_y (x_k - x)\,dx = 0 \end{aligned}\right\} (2)$$

(1) $\wedge$ (2) чине систем од 6 једначина са 6 непознатих $(H_{ik}, V_{ik}, M_{ik}, H_{ki}, V_{ki}, M_{ki})$. Ако су X_1, X_2, X_3 међусобно независне и независне од услова равнотеже (2) тај систем може да се реши и силе на крајевима штапа (H, V, M, N, T) могу да се прикажу као линеарне функције оптерећења $(H_0, V_0, M_0, N_0, T_0)$ и величина X_1, X_2, X_3 које у том случају називамо СТАТИЧКИ НЕЗАВИСНИМ ВЕЛИЧИНАМА ШТАПА.

Опште решење за силе у пресецима штапа:

$$H = H_0 + X_1 H_1 + X_2 H_2 + X_3 H_3 = H_0 + \sum_{k=1}^{3} X_k H_k$$
$$V = V_0 + X_1 V_1 + X_2 V_2 + X_3 V_3 = V_0 + \sum_{k=1}^{3} X_k V_k$$
$$M = M_0 + X_1 M_1 + X_2 M_2 + X_3 M_3 = M_0 + \sum_{k=1}^{3} X_k M_k$$
$$N = N_0 + X_1 N_1 + X_2 N_2 + X_3 N_3 = N_0 + \sum_{k=1}^{3} X_k N_k$$
$$T = T_0 + X_1 T_1 + X_2 T_2 + X_3 T_3 = T_0 + \sum_{k=1}^{3} X_k T_k$$

Силе у било којем пресеку с се могу одредити ако познајемо силе на било којем крају штапа.

9 ИЗВЕСТИ ИЗРАЗЕ СИЛЕ У ПРЕСЕЦИМА Ш. КАД СУ СТАТИЧКИ НЕЗАВИСНЕ ВЕЛ

$X_1 = M_{ik},\quad X_2 = M_{ki},\quad X_3 = S_{ik} = (N_{ik} + N_{ki})/2$

СТАТ. НЕЗ ВЕЛИЧ:

$X_1 = M_{ik} \quad X_2 = M_{ki} \quad X_3 = \dfrac{N_{ik} + N_{ki}}{2} = S_{ik}$

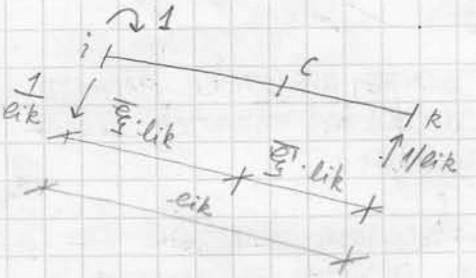
аксијална сила штапа

полузбир сила правцу тетиве

3 стања:

$\bar{\xi}, \bar{\xi}'$ - бездимензионалне коор. положаја пресека за које важи $\bar{\xi} + \bar{\xi}' = 1$

стање $\boxed{X_1 = M_{ik} = 1}$ $X_2 = X_3 = 0$

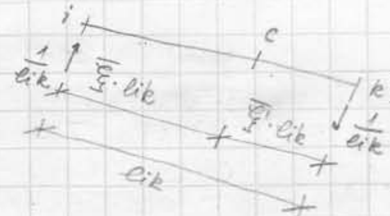


$N_1 = 0$

$T_1 = -\dfrac{1}{l_{ik}}$

$M_1 = \bar{\xi}'$

стање $\boxed{X_2 = M_{ki} = 1}$



$N_2 = 0$

$T_2 = \dfrac{1}{l_{ik}}$

$M_2 = \bar{\xi}$

стање $\boxed{X_3 = S_{ik} = 1}$

$\dfrac{N_{ik} + N_{ki}}{2} = 1 \quad N_{ik} = N_{ki} \Rightarrow N_{ik} = N_{ki} = 1$

$N_3 = 1 \quad T_3 = 0 \quad M_3 = 0$

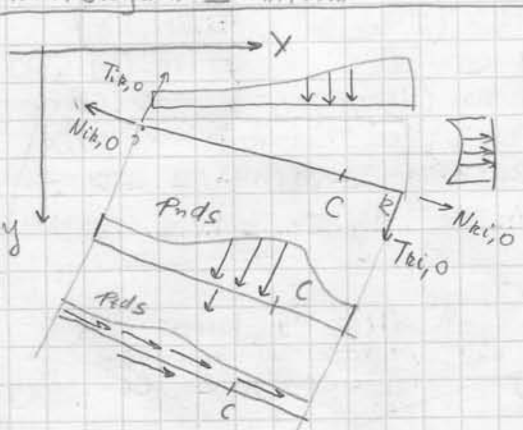
ИЗРАЗИ ЗА СИЛЕ У ПРОИЗВОЉНОМ ПРЕСЕКУ: $(X_1 = X_2 = X_3 = 0)$ ПОСТОЈИ САМО ОПТЕРЕЋЕЊЕ

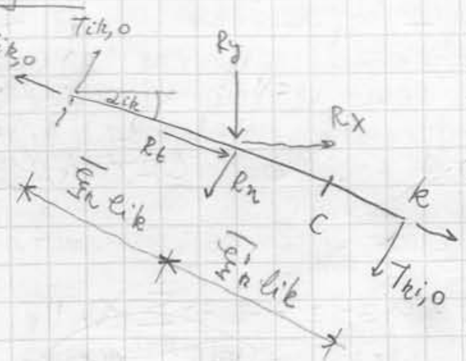
$N = \underbrace{N_1 X_1}_{0} + \underbrace{N_2 X_2}_{0} + N_3 X_3 + N_0 = S_{ik} + N_0$

$T = T_1 X_1 + T_2 X_2 + \underbrace{T_3 X_3}_{0} + T_0 = \dfrac{M_{ki} - M_{ik}}{l_{ik}} + T_0$

$M = M_1 X_1 + M_2 X_2 + \underbrace{M_3 X_3}_{0} + M_0 = \bar{\xi}' \cdot M_{ik} + \bar{\xi} \cdot M_{ki} + M_0$

КОНСТРУКЦИЈА ДИЈАГРАМА СИЛА У ПРЕСЕЦИМА:





$R_n = R_y \cos\alpha_{ik} - R_x \sin\alpha_{ik}$

$R_t = R_y \sin\alpha_{ik} + R_x \cos\alpha_{ik}$

$T_{ik,0} = R_n \cdot \bar{\xi}'_R$

$T_{ki,0} = -R_n \cdot \bar{\xi}_R$

$N_{ki,0} - N_{ik,0} + R_t = 0$

$S_{ik} = \dfrac{N_{ik} + N_{ki}}{2} = 0 \quad N_{ki,0} + N_{ik,0} = 0$

$N_{ki,0} = -\dfrac{R_t}{2} \quad N_{ik,0} = \dfrac{R_t}{2}$

$R_x = \int_i^k p_x \, dy$

$R_y = \int_i^k p_y \, dx$

$N_0 = N_{ik,0} - \int_i^c p_t \, ds = \dfrac{R_t}{2} - \int_i^c p_t \, ds$

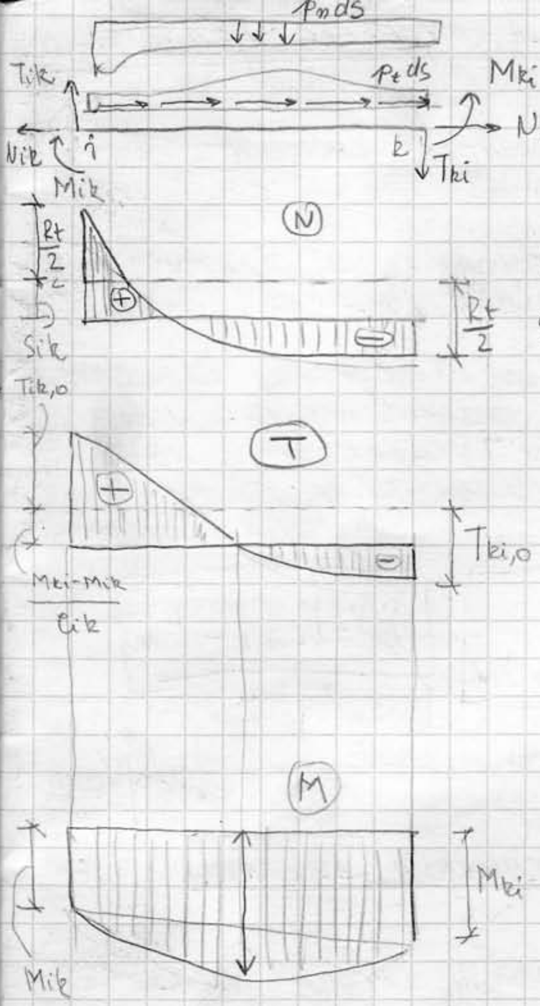
$T_0 = T_{ik,0} - \int_i^c p_n \, ds = R_n \cdot \bar{\xi}'_R - \int_i^c p_n \, ds$

$M_0 = T_{ik,0} \cdot \bar{\xi}_c l_{ik} - \int p_n (\bar{x}_c - \bar{x}) \, ds$

$\boxed{X_1 = S_{ik} \quad X_2 = M_{ik} \quad X_3 = M_{ki}}$

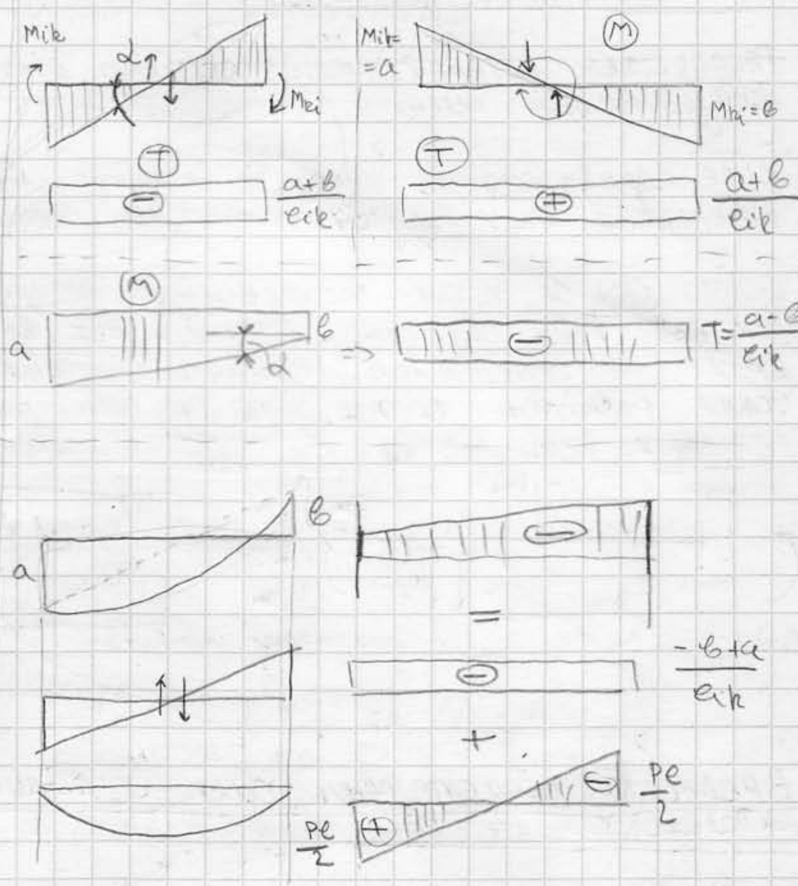
$$\boxed{N = N_0 + S_{ik} \qquad T = T_0 + \frac{M_{ki} - M_{ik}}{l_{ik}} \qquad M = M_0 + M_{ki}\bar{\xi} + M_{ik}\bar{\xi}'}$$

ПОШТО ЈЕ ИЗВОД M=T, АКО ЗНАМО M ЗНАМО И T.

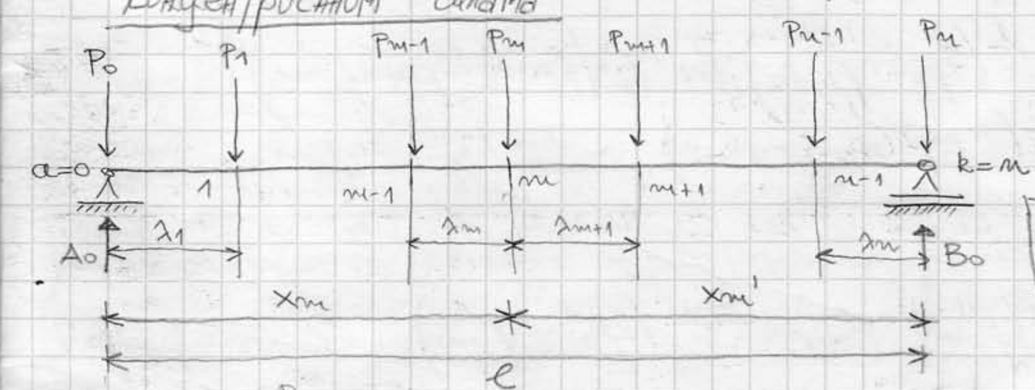


$N = N(p_t)$

$S_{ik} = \frac{N_{ik} + N_{ki}}{2}$



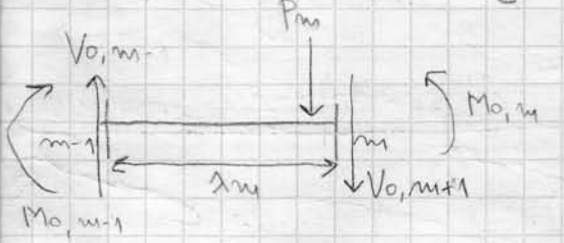
10. Нумерички поступак одређивања сила у пресецима просте греде оптерећене концентрисаним силама



Изрази за реакције просте греде гласе:

$$\boxed{A_0 = \frac{1}{l} \sum_{m=0}^{n} P_m \cdot x_m'}$$

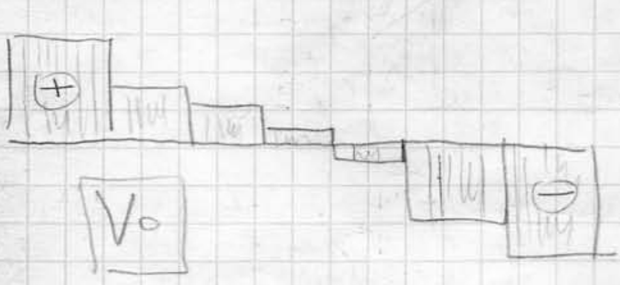
$$\boxed{B_0 = \frac{1}{l} \sum_{m=0}^{n} P_m x_m = \sum_{m=0}^{n} P_m - A_0}$$

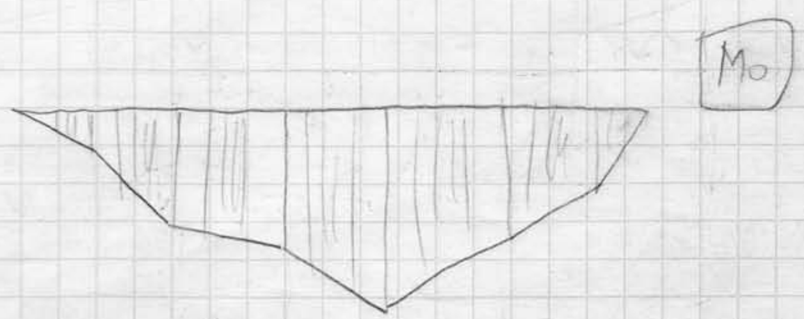


Вредности пресечних сила у чвору m добијају се на основу рекурентних образаца:

$$\boxed{V_{0,m+1} = V_{0,m} - P_m} \qquad \boxed{M_{0,m} = M_{0,m-1} + V_{0,m} \cdot \lambda_m}$$

Трансверзалне силе су const између чворова, док се моменти савијања линеарно мењају од чвора до чвора.



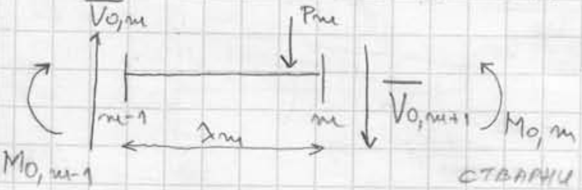


11. Нумерички поступак одређивања сила у пресецима просте греде оптерећене произвољно расподељеним оптерећењем:

Расподељено оптерећење замењујемо статички еквивалентним системом концентрисаних сила.

Силе одређујемо из услова да моменти савијања у чворовима за задато оптерећење буду једнаки моментима савијања услед сила P_m.

Пошто смо са задатог расподељеног оптерећења прешли на статички еквивалентни систем, T не одговарају стварном већ замењујућем оптерећењу, оне нам служе за срачунавање момената савијања. Стварне T одређујемо из услова равнотеже вертик. сила за посматрану ламелу узимајући у обзир резултанту оптерећења R_m.



замењујуће силе

$$\boxed{\begin{aligned}\overline{V}_{0,m+1} &= \overline{V}_{0,m} - P_m\\ M_{0,m} &= M_{0,m-1} + \overline{V}_{0m}\,\lambda_m\end{aligned}}$$

стварни моменти

стварна T

$$\boxed{V_{0m} = V_{0m-1} - R_m}$$

Вредности концентрисаних сила за различите апроксимације дијаграма расподељеног оптерећења:

Ако се оптерећење између чворова за статички еквивалентан систем мења линеарно: $P_0 = \frac{\lambda}{6}(2p_0+p_1)$; $P_m = \frac{\lambda}{6}(p_{m-1}+4p_m+p_{m+1})$; $P_n = \frac{\lambda}{6}(p_{n-1}+2p_n)$

$m=1,2,\dots,n-1$

По квадратној параболи: $P_0 = \frac{\lambda}{24}(7p_0+6p_1-p_2)$; $P_m = \frac{\lambda}{12}(p_{m-1}+10p_m+p_{m+1})$

$P_n = \frac{\lambda}{24}(7p_n+6p_{n-1}-p_{n-2})$ $\quad m=1,2,\dots,n-1$

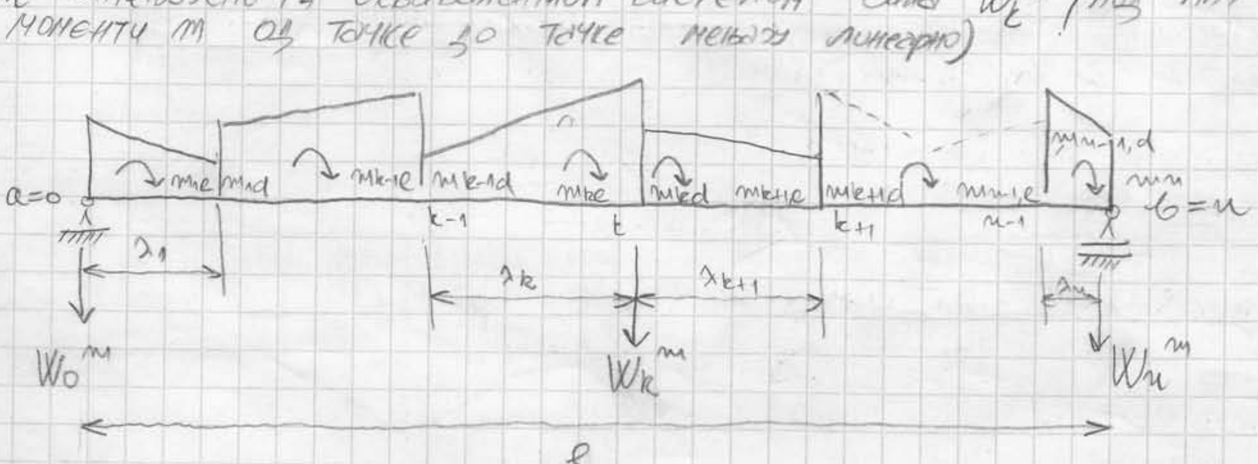
Ако је оптерећење на штапу скоковито, тада су изрази за статички еквивалентни систем конц. сила (уз пп о линеарној промени оптерећ. од чвора до чвора):

$P_0 = \frac{\lambda_1}{6}(2p_0^d+p_1^l)$; $P_m = \frac{\lambda_m}{6}(p_{m-1}^d+2p_m^l)+\frac{\lambda_{m+1}}{6}(2p_m^d+p_{m+1}^l)$

$P_n = \frac{\lambda_n}{6}(p_{n-1}^d+2p_n^l)$ $\quad m=1,2,\dots,n-1$

12. Одређивање сила у пресецима просте греде оптерећене произвољно расподељеним моментима, нумерички поступак:

Ако на греду делује оптерећење у облику скоковито расподељених момената савијања m замењујемо га еквивалентним системом сила W_k^m (под пп да се моменти m од тачке до тачке мењају линеарно)



$$W_0^m = -\frac{m_0 + m_{1,l}}{2} \qquad W_k^m = \frac{m_{k-1,d} + m_{k,l}}{2} - \frac{m_{k,d} + m_{k+1,l}}{2}$$

$$W_n^m = \frac{m_{n-1,d} + m_n}{2} \qquad k = 1, 2, \dots, n-1$$

- када је оптерећење расподељеним моментима непрекидно, тј. када нема скокова у дијаграму, тежине W_k^m су дате изразима:

$$W_0^m = -\frac{m_0 + m_1}{2} \qquad W_k^m = \frac{m_{k-1} - m_{k+1}}{2} \qquad W_n^m = \frac{m_{n-1} + m_n}{2} \qquad k = 1, 2, \dots, n-1$$

13. Интеграли диференцијалних ~~тачка~~ једначина померања тачака осе штапа:

$$\left.\begin{aligned} d(\varphi-\varphi_T) &= -\varkappa\, ds \\ du &= \varepsilon\, dx - \varphi\, dy \\ dv &= \varepsilon\, dy + \varphi\, dx \end{aligned}\right\}$$

диференцијалне једначине померања тачака осе штапа, интегралимо их у границама од a до b

$u_a, v_a, (\varphi-\varphi_T)_a$ - померања и обртања пресека a

$u_b, v_b, (\varphi-\varphi_T)_b$ - ——— || ——— b

$$(\varphi-\varphi_T)_b - (\varphi-\varphi_T)_a = -\int_a^b \varkappa\, ds$$

$$u_b - u_a = \int_a^b \varepsilon\, dx - \int_a^b \varphi\, dy = \int_a^b \varepsilon\, dx - \int_a^b \varphi_T\, dy - \int_a^b (\varphi-\varphi_T)\, dy \quad \text{(додао и одузео } \varphi_T)$$

$$v_b - v_a = \int_a^b \varepsilon\, dy + \int_a^b \varphi\, dx = \int_a^b \varepsilon\, dy + \int_a^b \varphi_T\, dx + \int_a^b (\varphi-\varphi_T)\, dx \quad \text{(додао и одузео } \varphi_T)$$

интеграли функције $(\varphi-\varphi_T)$ могу да се прикажу у функцији деформацијске величине $\varkappa$ и обртања пресека a или пресека b.

$d(\varphi-\varphi_T) = -\varkappa\, ds \;/\cdot (y_b - y)$, односно са $\cdot(y - y_a)$, онда интегралимо $\int_a^b$

$$\int_a^b (y_b - y)\, d(\varphi-\varphi_T) = -\int_a^b (y_b-y)\varkappa\, ds \;;\quad \int_a^b (y-y_a)\, d(\varphi-\varphi_T) = -\int_a^b (y-y_a)\varkappa\, ds$$

на ова два израза примењујемо парцијалну интеграцију $\int_a^b u\,dv = u\cdot v\big|_a^b - \int_a^b v\,du$

$$\boxed{\int_a^b (\varphi-\varphi_T)\, dy = (y_b-y_a)(\varphi-\varphi_T)_a - \int_a^b (y_b-y)\varkappa\, ds \;;\; \int_a^b (\varphi-\varphi_T)\, dy = (y_b-y_a)(\varphi-\varphi_T)_b + \int_a^b (y-y_a)\varkappa\, ds} \checkmark$$

$d(\varphi-\varphi_T) = -\varkappa\, ds \;/\cdot (x_b - x)$, односно са $(x - x_a)$, онда интегралимо $\int_a^b$

$$\boxed{\int_a^b (\varphi-\varphi_T)\, dx = (x_b-x_a)(\varphi-\varphi_T)_a - \int_a^b (x_b-x)\varkappa\, ds \;;\; \int_a^b (\varphi-\varphi_T)\, dx = (x_b-x_a)(\varphi-\varphi_T)_b + \int_a^b (x-x_a)\varkappa\, ds} \checkmark$$

уоквирене једначине уносимо у $u_b - u_a = \dots$ и $v_b - v_a = \dots$; $(dx = ds\cos\alpha;\ dy = ds\sin\alpha)$

$$u_b - u_a = -(y_b-y_a)(\varphi-\varphi_T)_a + \int_a^b \left[(y_b-y)\varkappa + \varepsilon\cos\alpha - \varphi_T\sin\alpha\right] ds =$$

$$= -(y_b-y_a)(\varphi-\varphi_T)_b - \int_a^b \left[(y-y_a)\cdot\varkappa - \varepsilon\cos\alpha + \varphi_T\sin\alpha\right] ds$$

$$v_b - v_a = (x_b-x_a)(\varphi-\varphi_T)_a + \int_a^b \left[-(x_b-x)\varkappa + \varepsilon\sin\alpha + \varphi_T\cos\alpha\right] ds =$$

$$= (x_b-x_a)(\varphi-\varphi_T)_b + \int_a^b \left[(x-x_a)\varkappa + \varepsilon\sin\alpha + \varphi_T\cos\alpha\right] ds$$

- добили смо 2 израза за разлику померања крајева посматраног интервала $u_b - u_a$, односно

$v_b - v_a$, први садржи обртања левог краја $(\varphi-\varphi_T)_a$, а други обртање десног краја $(\varphi-\varphi_T)_b$.

Померања штапа као крутог тела:

Да би одредили померања и обртања неке тачке штапа, морамо знати померања и обртања неке друге тачке штапа.

Пишемо једначине за интервал ic, $a \to i$ и $b \to c$, односно за ck, $a \to c$ и $b \to k$

$$(\varphi-\varphi_T)_c = (\varphi-\varphi_T)_i - \int_i^c \varkappa \, ds = (\varphi-\varphi_T)_k + \int_c^k \varkappa \, ds$$

$$u_c = u_i - (y_c - y_i)(\varphi-\varphi_T)_i + \int_i^c [(y_c - y)\varkappa + \varepsilon\cos\alpha - \varphi_T \sin\alpha] \, ds =$$
$$= u_k + (y_k - y_c)(\varphi-\varphi_T)_k + \int_c^k [(y - y_c)\varkappa - \varepsilon\cos\alpha + \varphi_T \sin\alpha] \, ds$$

$$v_c = v_i + (x_c - x_i)(\varphi-\varphi_T)_i + \int_i^c [-(x_c - x)\varkappa + \varepsilon\sin\alpha + \varphi_T \cos\alpha] \, ds =$$
$$= v_k - (x_k - x_c)(\varphi-\varphi_T)_k - \int_c^k [(x - x_c)\varkappa + \varepsilon\sin\alpha + \varphi_T \cos\alpha] \, ds$$

* Можемо срачунати помер. неке тачке ако знамо померања и обртања у i и k + деформац. $\varepsilon, \varkappa, \varphi_T$, а њих знамо ако знамо пресечне силе (N, T, M)

Горња 3 израза дефинишу померање произвољне тачке штапа и обртање произвољног пресека штапа.

- За штап који се не деформише, величине $\varkappa$, ε и φ_T су једнаке нули (значи изрази под интегралом нестају):

$$\varphi_c' = \varphi_i \qquad \qquad \varphi_c'' = \varphi_k$$
$$u_c' = u_i - (y_c - y_i) \cdot \varphi_i \quad \text{или} \quad u_c'' = u_k + (y_k - y_c)\varphi_k$$
$$v_c' = v_i + (x_c - x_i) \cdot \varphi_i \qquad v_c'' = v_k - (x_k - x_c)\varphi_k$$

Померања штапа као крутог тела

- Појам деформацијски независних величина, опште решење за померања тачака осе штапа

- Уместо померања и обртања крајева могу да буду задате 3 величине које потпуно одређују померања штапа као круте плоче у равни. Те величине (U_1, U_2, U_3) зовемо **деформацијски независне величине штапа** и оне су или померања одређених тачака штапа или обртања одређених пресека или неке линеарне функције тих величина. $U_j = U_j(u_i, v_i, \varphi_i, u_k, v_k, \varphi_k)$ $\quad j = 1,2,3$

под да су U_j функције само померања и обртања крајева штапа

Општа решења за померања тачака осе штапа су:

$$(\varphi-\varphi_T)_c = (\varphi-\varphi_T)_{c,0} + U_1 \varphi_{c,1} + U_2 \varphi_{c,2} + U_3 \varphi_{c,3}$$
$$u_c = u_{c,0} + U_1 u_{c,1} + U_2 u_{c,2} + U_3 u_{c,3}$$
$$v_c = v_{c,0} + U_1 v_{c,1} + U_2 v_{c,2} + U_3 v_{c,3}$$

Величине $(\varphi-\varphi_T)_{c,0}$; $u_{c,0}$; $v_{c,0}$ су обртања и померања услед спољашњих утицаја, када је $U_1 = U_2 = U_3 = 0$, овакво стање деформације зовемо $U_j = 0$.

Величине $\varphi_{c,j}$; $u_{c,j}$; $v_{c,j}$ су обртања пресека и померања тачака осе штапа као круте плоче у равни, тако да је $U_j = 1$, а друге две величине и су нула.

14. Извести изразе за основне деформацијске величине штапа $\Delta l_{ik}, \tau_{ik}, \tau_{ki}$ у функцији компонената померања крајева штапа и основних деформацијских величина оса штапа $\varepsilon, \varkappa, \varphi_T$:

$$\boxed{\begin{aligned}\Delta l_{ik} &= \bar{u}_k - \bar{u}_i \\ \psi_{ik} &= \frac{\bar{v}_k - v_i}{l_{ik}}\end{aligned}}$$

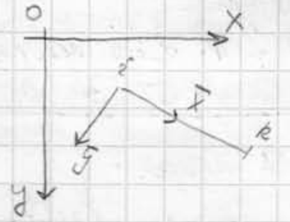
Δl_{ik} — промена дужине тетиве штапа; ψ_{ik} — угао обртања тетиве штапа } Ове две величине приближно дефинишу промену дужине штапа

$du = \varepsilon dx - \varphi dy \qquad d\bar{u} = \varepsilon d\bar{x} - \varphi d\bar{y}$

$dv = \varepsilon dy + \varphi dx \qquad d\bar{v} = \varepsilon d\bar{y} + \varphi d\bar{x}$

$d(\varphi - \varphi_T) = -\varkappa ds \qquad d(\varphi - \varphi_T) = -\varkappa ds$

релације су непромењиве у односу на одговарајући коор. систем



$d\bar{x} = ds$

$d\bar{y} = 0$

$$\left.\begin{aligned} d\bar{u} &= \varepsilon ds \\ d\bar{v} &= \varphi ds \\ d(\varphi-\varphi_T) &= -\varkappa ds \end{aligned}\right\} \int_i^k \Rightarrow \begin{aligned} &\rightarrow \bar{u}_c = \bar{u}_i + \int_i^c \varepsilon ds = \bar{u}_k - \int_c^k \varepsilon ds \quad (1) \\ &\rightarrow \bar{v}_c = \bar{v}_i + (\bar{x}_c - \bar{x}_i)(\varphi-\varphi_T)_i - \int_i^c [(\bar{x}_c - \bar{x})\varkappa - \varphi_T] ds = \bar{v}_k - (\bar{x}_k - \bar{x}_c)(\varphi-\varphi_T)_k - \int_c^k [(\bar{x} - \bar{x}_c)\varkappa + \varphi_T] ds \quad (2) \\ &\rightarrow (\varphi-\varphi_T)_c = (\varphi-\varphi_T)_i - \int_i^c \varkappa ds = (\varphi-\varphi_T)_k + \int_c^k \varkappa ds \end{aligned}$$

из (1) ⇔ пресек c померамо у пресек k $\Rightarrow \bar{u}_k = \bar{u}_i + \int_i^k \varepsilon ds \Rightarrow \Delta l_{ik} = \bar{u}_k - \bar{u}_i \Rightarrow \boxed{\Delta l_{ik} = \int_i^k \varepsilon ds}$

у $(2)^A$ $c \rightarrow k \Rightarrow \bar{v}_k = \bar{v}_i + \xi_c \cdot l_{ik}(\varphi-\varphi_T)_i - \int_i^k (\bar{\xi}' \cdot l_{ik} \cdot \varkappa - \varphi_T) ds$, пошто тачка c прелази у k $\xi_c = 1$

пошто је $(\varphi-\varphi_T)_i = \psi_{ik} + \tau_{ik}$ — деформацијони угао на крају i штапа ik (промена угла између тетиве ш. и пресека i), имамо $\frac{\bar{v}_k - \bar{v}_i}{l_{ik}} = \cancel{\psi_{ik}} + \tau_{ik} - \frac{1}{l_{ik}} \int_i^k (\bar{\xi}' l_{ik} \cdot \varkappa - \varphi_T) ds \Rightarrow$

$\Rightarrow \boxed{\tau_{ik} = \frac{1}{l_{ik}} \int_i^k (\bar{\xi}' l_{ik} \cdot \varkappa - \varphi_T) ds}$

из $(2)^B$ имамо $(c \rightarrow i) \Rightarrow \bar{v}_i = \bar{v}_k - \bar{\xi}_c l_{ik}(\varphi-\varphi_T)_k - \int_c^k (\bar{\xi} \cdot l_{ik} \cdot \varkappa + \varphi_T) ds$, имамо да је $(\varphi-\varphi_T)_k = \psi_{ik} + \tau_{ki} \Rightarrow$

$\Rightarrow -\frac{\bar{v}_k - \bar{v}_i}{l_{ik}} = -\cancel{\psi_{ik}} - \tau_{ki} - \frac{1}{l_{ik}} \int_i^k (\bar{\xi} \cdot l_{ik} \varkappa + \varphi_T) ds \Rightarrow \boxed{\tau_{ki} = -\frac{1}{l_{ik}} \int_i^k (\bar{\xi} \cdot l_{ik} \cdot \varkappa + \varphi_T) ds}$

из усвојених веза $\Rightarrow$ ако знамо $\varepsilon, \varkappa, \varphi_T$ знамо и $\Delta l_{ik}, \tau_{ik}, \tau_{ki}$

15. Извести базну матрицу флексибилности f за произвољан прав штап:

1

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1/l_{ik} & -1/l_{ik} \\ 0 & \bar{\xi}' & -\bar{\xi}' \end{bmatrix}$$

успоставља везу између статички независних величина ш. и сила у пресецима тог ш.

$$R = \begin{bmatrix} N \\ T \\ M \end{bmatrix} \quad X = \begin{bmatrix} S_{ik} \\ M_{ik} \\ M_{ki} \end{bmatrix} \quad R_0 = \begin{bmatrix} N_0 \\ T_0 \\ M_0 \end{bmatrix} \quad \boxed{R = LX + R_0}$$

2. група ј-на

$\varepsilon = \frac{N}{EF} + \alpha_t \cdot t$

$\varphi_T = k \cdot \frac{T}{GF}$

$\varkappa = \frac{M}{EI} + \alpha_t \frac{\Delta t}{h}$

$$\epsilon = \begin{bmatrix} \varepsilon \\ \varphi_T \\ \varkappa \end{bmatrix} \quad D_E = \begin{bmatrix} \frac{1}{EF} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{k}{GF} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{EI} \end{bmatrix}$$

— матрица еластичних карактеристика штапа

$$\epsilon_T = \begin{bmatrix} \alpha_t t \\ 0 \\ \alpha_t \frac{\Delta t}{h} \end{bmatrix} \qquad \boxed{\epsilon = D_E \cdot R + \epsilon_T}$$

3. група ј-на

$\Delta l_{ik} = \int_i^k \varepsilon ds$

$\tau_{ik} = \frac{1}{l_{ik}} \int_i^k (-\varphi_T + \bar{\xi}' l_{ik} \varkappa) ds$

$\tau_{ki} = \frac{1}{l_{ik}} \int_i^k (-\varphi_T - \bar{\xi} l_{ik} \varkappa) ds$

$$\delta = \begin{bmatrix} \Delta l_{ik} \\ \tau_{ik} \\ \tau_{ki} \end{bmatrix} \quad L' = \begin{bmatrix} 1 & & \\ & -\frac{1}{l_{ik}} & \bar{\xi}' \\ & -\frac{1}{l_{ik}} & -\bar{\xi}' \end{bmatrix}$$

$$\boxed{\delta = \int_i L' \epsilon ds}$$

$$\delta=\int_i^k L'\varepsilon ds = \int_i^k L'(D_E\cdot R+\varepsilon_T)ds = \int_i^k L'[D_E(LX+R_0)+\varepsilon_T]ds =$$
$$=\left(\int_i^k (L'\cdot D_E\cdot L)ds\right)\cdot X + \int_i^k L'\cdot D_E\cdot R_0\cdot ds + \int_i^k L'\cdot\varepsilon_T ds$$

$$f=\begin{bmatrix} l/EF & & \\ & l/3EI & -l/6EI \\ & -l/6EI & l/3EI \end{bmatrix}$$ симетрична базна матрица флексибилности

$$\boxed{f=\int_i^k L'\cdot D_E\cdot L ds}$$ - базна матрица флексибилности штапа

(успоставља везу између стат. и деф. незав. величина ш.)

$$f=\begin{bmatrix} \Delta l_{ik,s} & 0 & 0 \\ 0 & \tau_{ik,i} & \tau_{ik,k} \\ 0 & \tau_{ki,i} & \tau_{ki,k} \end{bmatrix}$$ $\tau_{ik,k}=\tau_{ki,i}$ јер је f симетрична у односу на главну дијагоналу

16. Извести векторе δ_0 и δ_T за произвољан прав штап:

Користимо везе из 15. питања

$$\delta=\int_i^k L'\cdot\varepsilon ds=\int_i^k L'(D_E\cdot R+\varepsilon_T)ds=\int_i^k L'[D_E(LX+R_0)+\varepsilon_T]ds=\left(\int_i^k(L'\cdot D_E\cdot L)ds\right)X+\int_i^k L' D_E\cdot R_0 ds+\int_i^k L'\varepsilon_T ds$$

$$\delta_0=\int_i^k L'\cdot D_E R_0 ds$$ - зависи од оптерећења на штапу (од дијаграма нормалне силе и момента савијања одговарајуће просте греде)

издужење од оптерећења

$$\delta_0=\begin{bmatrix}\Delta l_{ik,0}\\ \tau_{ik,0}\\ \tau_{ki,0}\end{bmatrix}\quad \Delta l_{ik,0}=\int_i^k \frac{N_0}{EF}ds\quad \tau_{ik,0}=\int_i^k\left(-\frac{k}{GF}\frac{T_0}{l_{ik}}+\frac{M_0}{EI}\cdot\bar{\xi}'\right)ds$$
$$\tau_{ki,0}=\int_i^k\left(-\frac{k}{GF}\frac{T_0}{l_{ik}}-\frac{M_0}{EI}\cdot\bar{\xi}\right)ds$$

$$\delta_t=\int_i^k L'\varepsilon_T ds$$ - зависи од температурне промене и температурне разлике на штапу

$$\delta_t=\begin{bmatrix}\Delta l_{ik,t}\\ \tau_{ik,t}\\ \tau_{ki,t}\end{bmatrix}\quad \Delta l_{ik,t}=\int_i^k \alpha_t t ds\quad \tau_{ik,t}=\int_i^k \alpha_t\frac{\Delta t}{h}\bar{\xi}' ds\quad \tau_{ki,t}=-\int_i^k\alpha_t\frac{\Delta t}{h}\cdot\bar{\xi}\cdot ds$$

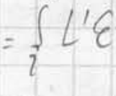
δ_t - издужење од температуре

$$\boxed{\delta=fX+\delta_0+\delta_t}\quad \begin{bmatrix}\Delta l_{ik}\\ \tau_{ik}\\ \tau_{ki}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\Delta l_{ik,s} & 0 & 0\\ 0 & \tau_{ik,i} & \tau_{ik,k}\\ 0 & \tau_{ki,i} & \tau_{ki,k}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}S_{ik}\\ M_{ik}\\ M_{ki}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\Delta l_{ik,0}\\ \tau_{ik,0}\\ \tau_{ki,0}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\Delta l_{ik,t}\\ \tau_{ik,t}\\ \tau_{ki,t}\end{bmatrix}$$

издужење једног ш. = $\Delta l_{ik,s}$ + издужење од опт + издужење од температуре

17. Елементи и чворови носача, појам најмањег броја чворова у носачу:

Унутрашњи елементи носача (спречавају релативна померања крајева штапа): штапови и крути углови


крута веза 2 штапа (исто обртање)

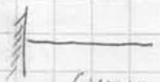
Спољашњи елементи носача (спречавају померања тачака носача у односу на неку сталну тачку ван носача)

Ослонци: конструктивни елемент, спречава померање у правцу ослањања


непокретно лежиште


покретно лежиште

УКЉЕШТЕЊА: КОНСТРУКТИВНИ ДЕО НОСАЧА, СПРЕЧАВА ОБРТАЊЕ



НЕПОКРЕТНО УКЉЕШТЕЊЕ (ЧЕШЋЕ У КОНСТРУКЦИЈАМА)

ТАЧКА СЕ МОЖЕ ПОМЕРАТИ, АЛИ УКЉЕШТЕНИ ПРЕСЕК СЕ НЕ МОЖЕ ОБРТАТИ

z_s - БРОЈ ШТАПОВА z_k - БРОЈ КРУТИХ УГЛОВА z_o - БРОЈ ОСЛОНАЦА z_u - БРОЈ УКЉЕШТЕЊА

$z_s + z_k + z_o + z_u$ (УКУПАН БРОЈ СПОЉ. И УНУТР. ЕЛЕМЕНАТА ЈЕДНОГ НОСАЧА).

ЧВОРОВИ НОСАЧА СУ КРАЈЊЕ ТАЧКЕ ШТАПОВА, ТЈ. ТАЧКЕ НА СЛОБОДНИМ КРАЈЕВИМА ШТАПОВА, НА КРАЈЕВИМА НА КОЈИМА СУ ШТАПОВИ МЕЂУСОБНО ВЕЗАНИ, ОСЛОЊЕНИ ИЛИ УКЉЕШТЕНИ.

ПОЈАМ НАЈМАЊЕГ БРОЈА ЧВОРОВА У НОСАЧУ:

НОСАЧ СЕ САСТОЈИ ОД ТРИ ШТАПА КОЈИ ПОВЕЗУЈУ 4 ЧВОРА, ШТАПОВИ СУ ВЕЗАНИ СА 2 КРУТА УГЛА И ОСЛОЊЕНИ НА 3 ОСЛОНЦА. МЕЂУТИМ, МОГЛИ БИ СМО ДА КАЖЕМО ДА СЕ НОСАЧ САСТОЈИ САМО ОД ЈЕДНОГ ШТАПА СА ПОЛИГОНАЛНОМ ОБЛИКОМ ОСЕ КОЈИ ЈЕ ОСЛОЊЕН НА 3 ОСЛОНЦА, А ПОВЕЗУЈЕ САМО 2 ЧВОРА (1 И 2)

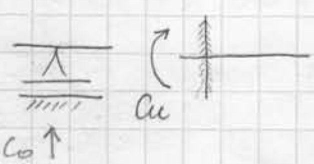
КИНЕМАТИЧКА И СТАТИЧКА ДЕФИНИЦИЈА НОСАЧА:

К.Д.Н: ДА БИ ЈЕДАН СИСТЕМ ШТАПОВА МОГАО ДА БУДЕ НОСАЧ, ПОТРЕБНО ЈЕ ДА БУДЕ КИНЕМАТИЧКИ СТАБИЛАН, ТЈ. ТАКАВ СИСТЕМ ЧИЈИ ЧВОРОВИ НЕ МОГУ ДА СЕ ПОМЕРАЈУ А ДА СЕ ПРИ ТОМЕ НЕ ДЕФОРМИШЕ НИ ЈЕДАН ШТАП, НЕ ПОМЕРИ НИ ЈЕДАН ОСЛОНАЦ ИЛИ НЕ ОБРНЕ НИ ЈЕДНО УКЉЕШТЕЊЕ.

КЛАСИФИКАЦИЈА: КИНЕМ. ПРОСТО СТАБИЛАН Н.; КИНЕМ. ВИШЕСТРУКО СТАБИЛАН Н.; КИНЕМ. ЛАБИЛАН НОСАЧ

С.Д.Н: ОНИ НОСАЧИ КОЈИ МОГУ У ГРАНИЦАМА ЕЛАСТИЧНОСТИ МАТЕРИЈАЛА ДА ПРИМЕ И ПРЕНЕСУ ПРОИЗВОЉНЕ СПОЉ. СИЛЕ. ПА МОГУ БИТИ И НОСАЧИ КОНСТРУКЦИЈА.

ОСНОВНЕ НЕПОЗНАТЕ И ОСНОВНЕ ЈЕДНАЧИНЕ У СТАТИЦИ ЛИНИЈСКИХ НОСАЧА: СПОЉ. СИЛЕ → АКТИВНЕ (ЗНАМО ИХ), → ПАСИВНЕ (СТОЈЕ У РАВНОТЕЖИ СА АКТ., НЕ ПОЗНАЈЕМО ИХ)



C_o — реакција ослонца

C_u — реакција (момент) укљештења

$C_o \dots z_o$ $C_u \dots z_u$

$z_o + z_u$ — БРОЈ НЕПОЗНАТИХ СПОЉ. СИЛА

БРОЈ ЧВОРОВА У КОЈИМА ПОСТОЈИ БАР 1 КРУТИ УГАО

СТАТИЧКИ НЕЗАВИСНЕ ВЕЛИЧИНЕ ШТАПА $\left(\begin{array}{l} S_{ik} \dots z_s \\ M_{ik}, M_{ki} \dots z_k + m \end{array} \right)$ $z_s + z_k + m$ - УКУПАН БРОЈ НЕПОЗНАТИХ УНУТРАШЊИХ СИЛА

$z_o + z_u + z_s + z_k + m$: УКУПАН БРОЈ СТАТИЧКИХ НЕПОЗНАТИХ (ЗА m ВЕЋИ ОД УКУПНОГ БРОЈА ЕЛЕМЕНАТА НОСАЧА)

$2k$: УКУПАН БРОЈ ДЕФОРМАЦИЈСКИХ НЕПОЗНАТИХ (k - БРОЈ ЧВОРОВА У НОСАЧУ)

$\boxed{z_o + z_u + z_s + z_k + m + 2k}$ УКУПАН БРОЈ НЕПОЗНАТИХ У НОСАЧУ

ЈЕДНАЧИНЕ ИЗ КОЈИХ МОГУ ДА СЕ ОДРЕДЕ ОВЕ НЕПОЗНАТЕ:

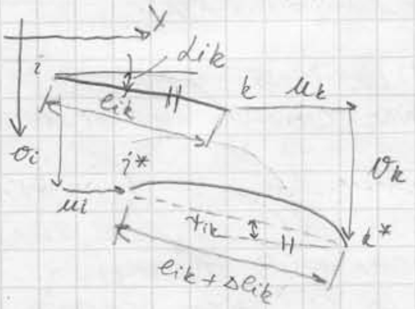
1. УСЛОВИ КОМПАТИБИЛНОСТИ ПОМЕРАЊА ЧВОРОВА НОСАЧА
2. УСЛОВИ РАВНОТЕЖЕ НОСАЧА

} ОСНОВНЕ ЈЕДНАЧИНЕ У СТАТИЦИ ЛИНИЈСКИХ НОСАЧА

18. Извести услове компатибилности померања чворова носача и описати критеријуме за кинематичку стабилност носача.

- ови услови успостављају везу између померања чворова (u_i, v_i) са једне стране и деформацијских величина штапова ($\Delta l_{ik}, \tau_{ik}, \tau_{ki}$), померања ослонаца ($C_{oi}$) и обртања уклештења ($C_{ui}$) са друге стране.
Имамо 4 групе оваквих једначина.

I представља везу између померања чворова на крајевима ш. и промене дужине тетиве тог ш.

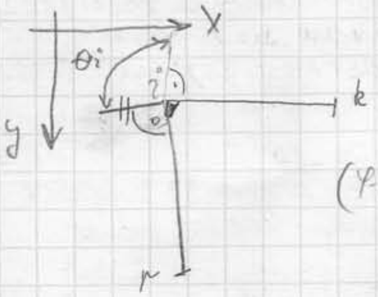


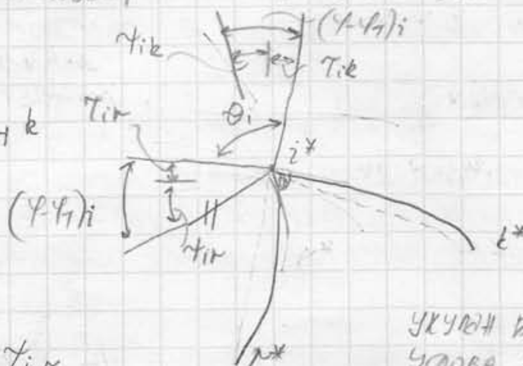
$$\boxed{F_1(i,k)=\Delta l_{ik}}$$

$$F_1(i,k)=(u_k-u_i)\cos\alpha_{ik}+(v_k-v_i)\sin\alpha_{ik}$$

} ових једначина има онолико колико има штапова у носачу тј. z_s

II Услов круте везе штапова (ако су 2 штапа ik и ir круто везани, угао обртања поп. пресека ш. ik на крају i једнак је углу обртања поп. пресека ш. ir на крају i)





θ_i остаје исто

$$(\varphi-\varphi_T)_i=\tau_{ik}+\psi_{ik}=\tau_{ik}+F_2(i,k)=$$
$$=\tau_{ir}+\psi_{ir}=\tau_{ir}+F_2(i,r)$$

$$\boxed{F_2(i,k)-F_2(i,r)=\tau_{ir}-\tau_{ik}}$$

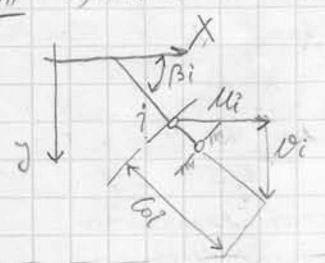
укупан број ових једначина једнак је броју крутих углова (z_k)

$F_2(i,k)=\psi_{ik}$ $\quad F_2(i,r)=\psi_{i,r}$

I и II су услови за релативна померања чворова носача (њихов број је $\overbrace{z_s+z_k}^{\text{бр. унутр. елем. носача}}$)

III односи се на ослонце

u_i, v_i - померања ослоњеног чвора



C_{oi} - померања ослонца у правцу ослонца

$$\boxed{u_i\cos\beta_i+v_i\sin\beta_i=C_{oi}}$$ (има их онолико колико има ослонаца... z_o)

IV

еластично уклештен штап

C_{ui} - обртање које еластичност уклештења дозвољава

$$C_{ui}=(\varphi-\varphi_T)_i=\psi_{ik}+\tau_{ik}=$$
$$=F_2(i,k)+\tau_{ik} \qquad \boxed{F_2(i,k)=C_{ui}-\tau_{ik}} \ \dots\ z_u$$

$C_{ui}=(\varphi-\varphi_T)_i=$
$=\psi_{ik}+\tau_{ik}$

III, IV - услови за апсолутно померање чворова носача (услови за померање чворова у односу на сталне тачке у равни носача, одређују их споља елементи — ослонци и уклештења)

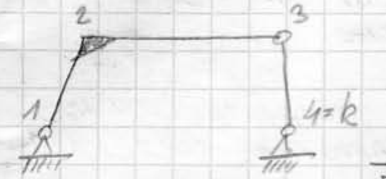
Укупан број услова компатибилности померања чворова носача једнак је укупном броју елемената носача

($z_s+z_k+z_o+z_u$)

КРИТЕРИЈУМИ ЗА КИНЕМАТИЧКУ СТАБИЛНОСТ НОСАЧА :

КОМПОНЕНТЕ ПОМЕРАЊА ЧВОРОВА СУ МЕЂУСОБНО НЕЗАВИСНЕ

I $Z_s + Z_k + Z_o + Z_u = 2K$ $D \neq 0$ ДЕТЕРМИНАНТА УСЛОВНИХ Ј-НА



$Z_s = 3$
$Z_k = 1$
$Z_u = 0$
$Z_o = 4$
$Z_s + Z_k + Z_u + Z_o = 8$

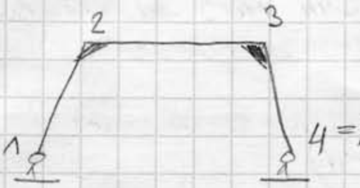
$2K = 8$ КИНЕМАТИЧКИ ПРОСТО СТАБИЛАН Н-

$\Delta \ell = 0$ ниједан ш. се не може издужити

$\tau = 0$ обртања $= 0$ $C = 0$ систем ј-на који

десна страна је нула, то је хомог. даје тривијално решење

II $Z_s + Z_k + Z_o + Z_u > 2K$ $rang(Z_s + Z_k + Z_o + Z_u) = 2K$ (КИНЕМАТИЧКИ ВИШЕСТРУКО СТАБИЛАН Н0)

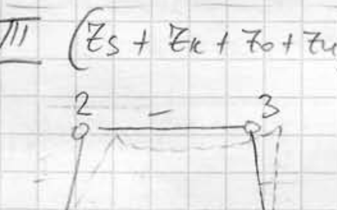


$Z_s = 3$
$Z_k = 2$
$Z_u = 0$
$Z_o = 4$
$Z_s + Z_k + Z_u + Z_o = 9 > 2K$

$2K = 8$

БР. ВИШКОВА ЕЛЕМЕНАТА: $(Z_s + Z_k + Z_o + Z_u) - 2K$

III $(Z_s + Z_k + Z_o + Z_u) < 2K$ или $r(Z_s + Z_k + Z_o + Z_u) < 2K$ – број независних услова померања



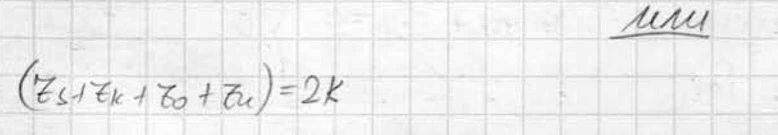
$2K = 8$

$Z_s = 3$
$Z_k = 0$
$Z_u = 0$
$Z_o = 4$
$Z_s + Z_k + Z_u + Z_o = 7 < 2K$

КИНЕМАТИЧКИ ЛАБИЛНИ Н0 (долази ће до померања чворова без деформ. штап.)
↳ не могу бити носачи грађ. к-ја

или

$(Z_s + Z_k + Z_o + Z_u) = 2K$



$Z_s = 25$
$Z_k = 0$
$Z_o = 3$
$Z_u = 0$
$28 = 2K$

ПОГРЕШНО РАСПОРЕЂЕНИ ЕЛЕМЕНТИ!

(Услови за померања чворова овог система су међусобно зависни)

ЗАМЕНОМ штапа 10-2 (који је сувишан) штапом 4-10 систем постаје стабилан

19. Описати критеријуме за статичку одређеност носача полазећи од услова равнотеже чворова носача :

$$\left.\begin{array}{l}\sum S_{ik}\cos\alpha_{ik} - \sum \frac{M_{ki}-M_{ik}}{\ell_{ik}}\sin\alpha_{ik} + C_{oi}\cos\beta_i + H_i = 0 \\ \sum S_{ik}\sin\alpha_{ik} + \sum \frac{M_{ki}-M_{ik}}{\ell_{ik}}\cos\alpha_{ik} + C_{oi}\sin\beta_i + V_i = 0\end{array}\right\} 2K$$

$$\lambda_{ik} = \pm 1$$

$$\sum \lambda_{ik} M_{ik} + M_i + C_{ui} = 0 \quad \dots \quad m$$

Услови равнотеже чворова носача (укупно $2K+m$ једначина)

НЕПОЗНАТЕ:

$S_{ik} \dots Z_s$

$M_{ik}, M_{ki} \dots Z_k + m$

$C_{oi} \dots Z_o$

$C_{ui} \dots Z_u$

$Z_s + Z_k + Z_o + Z_u + m$

1. СТАТИЧКИ ОДРЕЂЕНИ НОСАЧИ (кинематички просто стабилни носачи)

Могу да приме и пренесу произвољне спољ. силе па могу да буду и носачи конструкција

$Z_s + Z_k + Z_o + Z_u + \cancel{m} = 2K + \cancel{m}$

$D' \neq 0$ (ЈЕДНАЧИНЕ МЕЂУСОБНО НЕЗАВИСНЕ)

$Z_s + Z_k + Z_o + Z_u = 2K$

РЕАКЦИЈЕ ОСЛОНАЦА, МОМЕНТИ УКЉЕШТЕЊА И СИЛЕ У ПРЕСЕЦИМА СТАТИЧКИ ОДРЕЂЕНИХ НОСАЧА ЗАВИСЕ САМО ОД ОПТЕРЕЋЕЊА НОСАЧА А ЈЕДНАКЕ СУ [illegible]

2) СТАТИЧКИ НЕОДРЕЂЕНИ НОСАЧИ (ВИШЕСТРУКО КИНЕМАТИЧКИ СТАБИЛНИ НОСАЧИ)

$Z_s+Z_k+Z_o+Z_u+m > 2K+m$

$Z_s+Z_k+Z_o+Z_u > 2K$

ЗА РАЗЛИКУ ОД СОН КОД КОЈИХ ПОСТОЈИ САМО 1 РАВНОТЕЖНО УНУТРАШЊЕ СТАЊЕ КОД СНН ПОСТОЈИ ВИШЕ УНУТРАШЊИХ РАВНОТЕЖНИХ СТАЊА.

$Z_s+Z_k+Z_o+Z_u-2K$ – БРОЈ НЕПОЗНАТИХ СПОЉАШЊИХ ИЛИ УНУТРАШЊИХ СИЛА И МОМЕНАТА КОЈИ МО[ГУ] ДА СЕ ИЗАБЕРУ ПРОИЗВОЉНО А ДА СВИ УСЛОВИ РАВНОТЕЖЕ СИСТЕМА БУДУ ЗАДОВОЉЕНИ. (БРОЈ СТАТИЧКИ НЕЗАВИСНИХ ИЛИ СТАТИЧКИ НЕОДРЕЂЕНИХ ВЕЛИЧИНА СИСТЕМА)

-РЕАКЦИЈЕ ОСЛОНАЦА, МОМЕНТИ УКЉЕШТЕЊА И СИЛЕ У ПРЕСЕЦИМА СНН МОГУ ДА ПОСТО[ЈЕ] И КАД ЈЕ НОСАЧ НЕОПТЕРЕЋЕН. ТАКВА РАВНОТЕЖНА СТАЊА НАЗИВАМО УНУТРАШЊА РАВНОТЕЖНА СТАЊА НОСАЧА.

3) СТАТИЧКИ ПРЕОДРЕЂЕНИ НОСАЧИ (КИНЕМАТИЧКИ ЛАБИЛНИ НОСАЧИ)

$Z_s+Z_k+Z_o+Z_u+m < 2k+m$

ИЛИ

$D'=0$ (ЈЕДНАЧИНЕ НИСУ МЕЂУСОБНО НЕЗАВИСНЕ)

НЕ МОГУ ДА ПРИМЕ И ПРЕНЕСУ ПРОИЗВОЉНО ОПТЕРЕЋЕЊЕ И НИСУ У КОНСТРУКЦИЈАМА.

20. ПОЈАМ МОГУЋЕГ СТАЊА РАВНОТЕЖЕ И МОГУЋЕГ СТАЊА ПОМЕРАЊА:

$$\underbrace{\left.\begin{aligned} &dH+p_x dy=0\\ &dV+p_y dx=0\\ &dM+H dy-V dx=0\end{aligned}\right\}A}_{\text{УСЛОВИ РАВНОТЕЖЕ ЕЛЕМЕНАТА ШТАПОВА}}
\qquad
\underbrace{\left.\begin{aligned} &\sum \bar{H}_{ik}\cos\alpha_{ik}-\sum \bar{V}_{ik}\sin\alpha_{ik}+C_{oi}\cos\beta_i+P_{ix}=0\\ &\sum \bar{H}_{ik}\sin\alpha_{ik}+\sum \bar{V}_{ik}\cos\alpha_{ik}+C_{oi}\sin\beta_i+P_{iy}=0\\ &\sum \lambda_{ik}M_{ik}+C_{ui}+M_i\end{aligned}\right\}B}_{\text{УСЛОВИ РАВНОТЕЖЕ ЧВОРОВА НОСАЧА}}$$

$$\underbrace{\left.\begin{aligned} &du=\varepsilon dx-\psi dy\\ &dv=\varepsilon dy+\psi dx\\ &d(\varphi-\varphi_T)=-\varkappa ds\end{aligned}\right\}C}_{\text{ВЕЗЕ ПОМЕРАЊА, ОБРТАЊА И ДЕФОРМАЦИЈСКИХ ВЕЛИЧИНА ШТАПОВА}}
\qquad
\underbrace{\left.\begin{aligned} &F_1(i,k)=\Delta l_{ik}\\ &F_2(i,k)-F_2(i,r)=\tau_{ir}-\tau_{ik}\\ &u_i\cos\beta_i+v_i\sin\beta_i=c_{oi}\\ &F_2(i,k)=c_{ui}-\tau_{ik}\end{aligned}\right\}D}_{\text{УСЛОВИ КОМПАТИБИЛНОСТИ НОСАЧА}}
\qquad
\left.\begin{aligned} &\Delta l_{ik}=\int_i^k \varepsilon ds\\ &\tau_{ik}=\frac{1}{l_{ik}}\int_i^k(\bar{\xi}'\cdot l_{ik}\cdot\varkappa-\psi_T)ds\end{aligned}\right\}$$

МОГУЋЕ РАВНОТЕЖНО СТАЊЕ НОСАЧА: - ЧИНИ СВАКИ СИСТЕМ СПОЉАШЊЕГ РАСПОДЕЉЕНОГ ОПТЕРЕЋЕЊА p_x, p_y, КОНЦЕНТРИСАНИХ СИЛА И КОНЦЕНТРИСАНИХ МОМЕНАТА У ЧВОРОВИМА P_i, РЕАКЦИЈА ОСЛОНАЦА C_{oi} И МОМЕНАТА УКЉЕШТЕЊА C_{ui}, СИЛА У ПРЕСЕЦИМА H, V, M (N, T) КОЈИ ИДЕНТИЧКИ ЗАДОВОЉАВА ЈЕДНАЧИНЕ (A) И (B).

- НАШИ НОСАЧИ МОГУ БИТИ СТАТИЧКИ ОДРЕЂЕНИ И НЕОДРЕЂЕНИ. КОД СТАТИЧКИ ОДРЕЂЕНИХ Н. ПОСТОЈИ САМО ЈЕДНО МРСН. КОД СТАТИЧКИ НЕОДРЕЂЕНИХ ПОСТОЈИ ВЕЋИ БРОЈ МОГУЋИХ РАВНОТЕЖНИХ СТАЊА, ПА ЈЕ МРС САМО ЈЕДНО ОД ТИХ МРСН. И ТО ЈЕ ОСНОВНА РАЗЛИКА ИЗМЕЂУ СОН И СНН.

МОГУЋЕ СТАЊЕ ДЕФОРМАЦИЈЕ НОСАЧА: ЧИНИ СВАКИ СИСТЕМ ПОМЕРАЊА ЧВОРОВА НОСАЧА u, v И ОБРТАЊА φ, ДЕФОРМАЦИЈСКИХ ВЕЛИЧИНА ЕЛЕМЕНТА ШТАПА $\varepsilon, \varkappa$, ДЕФОРМАЦИЈСКИХ ВЕЛИЧИНА ШТАПА $\Delta l_{ik}, \tau_{ik}$ И ПОМЕРАЊА ОСЛОНАЦА И ОБРТАЊА УКЉЕШТЕЊА c_{oi}, c_{ui} КОЈИ ИДЕНТИЧКИ ЗАДОВОЉАВА Ј-НЕ (C), (D) И (E).

21. Везе могућег стања равнотеже и могућег стања померања за штап и њено физичко значење:

- Да бисмо успоставили везу посматраћемо СОН или СНН (свеједно јер веза важи за оба типа носача):

1. Уочићемо једно могуће равнотежно стање носача које је дефинисано: $\tilde{p}_x, \tilde{p}_y, \tilde{P}_i, \tilde{M}_i, \tilde{C}_{oi}, \tilde{C}_{ui}, \tilde{H}, \tilde{V}, \tilde{M} (\tilde{N}, \tilde{T})$ и посматраћемо у истом носачу неко друго:
2. МСДН $\tilde{\tilde{u}}, \tilde{\tilde{v}}, \tilde{\tilde{\varphi}}, \tilde{\tilde{\varepsilon}}, \tilde{\tilde{\varkappa}}, \tilde{\tilde{\varphi}}_T, \Delta \tilde{\tilde{\ell}}_{ik}, \tilde{\tilde{\tau}}_{ik}, \tilde{\tilde{c}}_{oi}, \tilde{\tilde{c}}_{ui}$. [Да бисмо указали да су ова 2 стања међусобно независна, МРСН обележимо $\sim$, а МСДН $\approx$]

$$d\tilde{H} + \tilde{p}_x dy = 0 \quad / \tilde{\tilde{u}}$$
$$d\tilde{V} + \tilde{p}_y dx = 0 \quad / \tilde{\tilde{v}} \qquad \int_i^k , +$$
$$d\tilde{M} + \tilde{H} dy - \tilde{V} dx = 0 \quad / -(\tilde{\tilde{\varphi}} - \tilde{\tilde{\varphi}}_T)$$

$$\underbrace{\int_i^k \tilde{\tilde{u}} d\tilde{H} - \int_i^k \tilde{H}(\tilde{\tilde{\varphi}} - \tilde{\tilde{\varphi}}_T) dy} + \underbrace{\int_i^k \tilde{\tilde{v}} d\tilde{V} + \int_i^k \tilde{V}(\tilde{\tilde{\varphi}} - \tilde{\tilde{\varphi}}_T) dx} - \int_i^k (\tilde{\tilde{\varphi}} - \tilde{\tilde{\varphi}}_T) d\tilde{M} + \int_i^k (\tilde{p}_x \tilde{\tilde{u}} dy + \tilde{p}_y \tilde{\tilde{v}} dx) = 0$$

$$\int_i^k \tilde{\tilde{u}} d\tilde{H} - \int_i^k \tilde{H}(\tilde{\tilde{\varphi}} - \tilde{\tilde{\varphi}}_T) dy = [\tilde{H} \tilde{\tilde{u}}]_i^k - \int_i^k \tilde{H} d\tilde{\tilde{u}} - \int_i^k \tilde{H}(\tilde{\tilde{\varphi}} - \tilde{\tilde{\varphi}}_T) dy = [\tilde{H} \cdot \tilde{\tilde{u}}]_i^k - \int_i^k \tilde{H}(\overbrace{d\tilde{\tilde{u}} + \tilde{\tilde{\varphi}} dy}^{\tilde{\tilde{\varepsilon}} dx} - \tilde{\tilde{\varphi}}_T dy) =$$
$$= [\tilde{H} \cdot \tilde{\tilde{u}}]_i^k - \int_i^k \tilde{H}(\tilde{\tilde{\varepsilon}} dx - \tilde{\tilde{\varphi}}_T dy)$$

$$\int_i^k \tilde{\tilde{v}} d\tilde{V} + \int_i^k \tilde{V}(\tilde{\tilde{\varphi}} - \tilde{\tilde{\varphi}}_T) dx = [\tilde{V} \cdot \tilde{\tilde{v}}]_i^k - \int_i^k \tilde{V}(\overbrace{d\tilde{\tilde{v}} - \tilde{\tilde{\varphi}} dx}^{\tilde{\tilde{\varepsilon}} dy} + \tilde{\tilde{\varphi}}_T dx) = [\tilde{V} \cdot \tilde{\tilde{v}}]_i^k - \int_i^k \tilde{V}(\tilde{\tilde{\varepsilon}} dy + \tilde{\tilde{\varphi}}_T dx)$$

$$-\int_i^k (\tilde{\tilde{\varphi}} - \tilde{\tilde{\varphi}}_T) d\tilde{M} = -[\tilde{M}(\tilde{\tilde{\varphi}} - \tilde{\tilde{\varphi}}_T)]_i^k + \int_i^k \tilde{M} \underbrace{d(\tilde{\tilde{\varphi}} - \tilde{\tilde{\varphi}}_T)}_{-\tilde{\tilde{\varkappa}} ds} = -[\tilde{M}(\tilde{\tilde{\varphi}} - \tilde{\tilde{\varphi}}_T)]_i^k - \int_i^k \tilde{M} \tilde{\tilde{\varkappa}} ds$$

$$\underbrace{[-\tilde{M}(\tilde{\tilde{\varphi}} - \tilde{\tilde{\varphi}}_T) + H \tilde{\tilde{u}} + \tilde{V} \cdot \tilde{\tilde{v}}]_i^k + \int_i^k (\tilde{p}_x \tilde{\tilde{u}} dy + \tilde{p}_y \cdot \tilde{\tilde{v}} dx)} = \int_i^k \tilde{M} \tilde{\tilde{\varkappa}} ds + \tilde{\tilde{\varepsilon}} (\overbrace{\tilde{H} \cos\alpha + \tilde{V} \sin\alpha}^{\tilde{N}}) ds + \tilde{\tilde{\varphi}}_T (\overbrace{\tilde{V} \cos\alpha - \tilde{H} \sin\alpha}^{\tilde{T}}) ds$$
$$= \underbrace{\int_i^k (\tilde{M} \tilde{\tilde{\varkappa}} + \tilde{N} \tilde{\tilde{\varepsilon}} + \tilde{T} \tilde{\tilde{\varphi}}_T) ds}$$

Лева страна: рад сила на крајевима штапа и рад спољ. сила. Рад сила на крајевима ш. и оптерећења МРСН на одговарајућим померањима и обртањима МСДН.

Десна стр: рад унутрашњих сила МРСН на деформацијама МСДН

Физичко значење: Рад спољ. сила на штапу једнак је раду унутрашњих сила на деформацију.

22. Веза могућег стања равнотеже и МСД за носач. Принцип виртуал. сила и виртуал. померања:

Горњу крајњу једначину сумирамо по свим штаповима $\sum_s \int_i^k = \int_s$ (значи пишемо је за цео носач)

$$\sum_s [-\tilde{M}(\tilde{\tilde{\varphi}} - \tilde{\tilde{\varphi}}_T) + \tilde{H} \cdot \tilde{\tilde{u}} + \tilde{V} \cdot \tilde{\tilde{v}}]_i^k + \sum_s \int_i^k \tilde{p}_x \tilde{\tilde{u}} dy + \tilde{p}_y \tilde{\tilde{v}} dx = \sum_s \int_i^k (\tilde{M} \tilde{\tilde{\varkappa}} + \tilde{N} \tilde{\tilde{\varepsilon}} + \tilde{T} \tilde{\tilde{\varphi}}_T) ds$$

$$\sum_s [-\tilde{M}(\tilde{\tilde{\varphi}} - \tilde{\tilde{\varphi}}_T) + \tilde{H} \tilde{\tilde{u}} + \tilde{V} \tilde{\tilde{v}}]_i^k = \sum_i \tilde{P}_i \underbrace{\tilde{\tilde{s}}_i}_{\text{померање}} + \sum_i \tilde{M}_i (\tilde{\tilde{\varphi}} - \tilde{\tilde{\varphi}}_T)_i + \sum_i \tilde{C}_{oi} \cdot \tilde{\tilde{c}}_{oi} + \sum_i \tilde{C}_{ui} \cdot \tilde{\tilde{c}}_{ui}$$

Рад сила на крајевима штапа једнак је раду сила на чворовима.

$$\underbrace{\sum_i \tilde{P}_i \tilde{\tilde{s}}_i + \sum \tilde{M}_i (\tilde{\tilde{\varphi}} - \tilde{\tilde{\varphi}}_T)_i + \int_s \tilde{p}_x \tilde{\tilde{u}} dy + \tilde{p}_y \tilde{\tilde{v}} dx}_{\text{рад свих спољ. активних сила у носачу}} + \underbrace{\sum_i \tilde{C}_{oi} \tilde{\tilde{c}}_{oi} + \sum_i \tilde{C}_{ui} \tilde{\tilde{c}}_{ui}}_{\sum \tilde{C} \tilde{\tilde{c}}} = \int_s (\tilde{M} \tilde{\tilde{\varkappa}} + \tilde{N} \tilde{\tilde{\varepsilon}} + \tilde{T} \tilde{\tilde{\varphi}}_T) ds$$

$$\boxed{\sum \tilde{P} \tilde{\tilde{s}} + \sum \tilde{C} \tilde{\tilde{c}} = \int_s (\tilde{M} \tilde{\tilde{\varkappa}} + \tilde{N} \tilde{\tilde{\varepsilon}} + \tilde{T} \tilde{\tilde{\varphi}}_T) ds}$$

Веза МРСН и МСДН

Из ове везе следе 2 основна принципа у теорији конструкција:

1. Принцип виртуалних сила } доп. да је једно од
2. Принцип —||— померања } ових стања виртуално.

АКО ЗА СТВАРНО СТАЊЕ ПРОГЛАСИМО ДЕФОРМАЦИЈЕ, СИЛЕ СУ ВИРТУАЛНЕ И ОБРАТНО

$$\underbrace{\sum \bar{P}}_{\text{ВИРТУАЛНА СИЛА}}\cdot \underbrace{s}_{\text{СТВАРНО ПОМЕРАЊЕ}} + \sum \bar{C}\, c = \int_s \left(\bar{M}\cdot \varkappa + \bar{N}\cdot \varepsilon + \bar{T}\cdot \varphi_T\right) ds$$

ПРИНЦИП ВИРТУАЛНИХ СИЛА

$$\sum P\cdot \bar{s} + \sum C\, \bar{c} = \int_s \left(M\bar{\varkappa} + N\bar{\varepsilon} + T\bar{\varphi}_T\right) ds$$

ПРИНЦИП ВИРТУАЛНИХ ПОМЕРАЊА
(ВИРТУАЛНА ПОМЕРАЊА СУ БЕСКОНАЧНО МАЛА ПОМЕРАЊА КОЈА ЗАДОВОЉАВАЈУ СВЕ УСЛОВЕ КОМПАТИБИЛНОСТИ ПОМЕРАЊА ЧВОРОВА НОСАЧА

- ПРИМЕНОМ ПРИНЦИПА В.П. МОЖЕ ДА СЕ СРАЧУНА СВЕ ОНО ШТО МОЖЕ ДА СЕ СРАЧУНА ИЗ УСЛОВА РАВНОТЕЖЕ ЕЛЕМЕНАТА ШТАПОВА И ЧВОРОВА НОСАЧА. (Ј-НЕ А и В)
- ПРИМЕНОМ ПРИНЦИПА В.С МОЖЕ ДА СЕ СРАЧУНА СВЕ ОНО ШТО МОЖЕ ДА СЕ СРАЧУНА ИЗ ДЕФОРМАЦИЈСКИХ УСЛОВА. (Ј-НЕ C и D).

23. ВРСТЕ ОПТЕРЕЋЕЊА: ПО ВРЕМЕНУ ДЕЛОВАЊА, ПРЕМА ПОЛОЖАЈУ НА НОСАЧУ, ПО НАЧИНУ ПРЕНОШЕЊА:

1) ПО ВРЕМЕНУ ДЕЛОВАЊА
   - СТАЛНО ОПТЕРЕЋЕЊЕ (СОПСТВЕНА ТЕЖИНА КОНСТРУКЦИЈЕ И СВИХ ЕЛЕМЕНАТА КОЈИ СУ УГРАЂЕНИ У КОНСТРУКЦИЈУ)
   - ПОВРЕМЕНА ОПТ. (ОНА КОЈА СЕ ПОВРЕМЕНО НАЛАЗЕ НА КОНСТРУКЦИЈИ: ВЕТАР, СНЕГ, ОПТ. ОД ЉУДСКЕ НАВАЛЕ)
     АКО ПОВРЕМ. ОПТ МОЖЕ ДА МЕЊА ПОЛОЖАЈ ПО НОСАЧУ НАЗИВАМО ГА ПОКРЕТНО ОПТ.
     → ЈЕДНАКО ПОДЕЉЕНО (ЉУДИ, РОБА, НАВА ВОЗИЛА)
     → СИСТЕМ КОНЦЕНТРИСАНИХ СИЛА (ДРУМСКА И ЖЕЛЕЗНИЧКА ВОЗИЛА)
     → РЕДОВНИЈЕ СИСТЕМ ПАРАЛЕЛНИХ КОНЦЕНТРИСАНИХ СИЛА НА МЕЂУСОБНИМ РАЗМАЦИМА КОЈИ СЕ У ТОКУ ВРЕМЕНА НЕ МЕЊАЈУ ДА ГА ЗОВЕМО ПОКРЕТАН СИС. ВЕЗАНИХ КОНЦ. СИЛА
   - ИЗУЗЕТНА ОПТ (ЗЕМЉОТРЕС И ПОЖАР)

2) ПРЕМА ПОЛОЖАЈУ НА НОСАЧУ:
   → КАО РАСПОДЕЉЕНЕ СИЛЕ И МОМЕНТИ
   → КАО КОНЦЕНТРИСАНЕ СИЛЕ И МОМЕНТИ

3) ПО НАЧИНУ ПРЕНОШЕЊА:
   → ОПТЕРЕЋЕЊА КОЈА СЕ ДИРЕКТНО (НЕПОСРЕДНО) ПРЕНОСЕ НА НОСАЧ (ШТАПОВИ ПРИМАЈУ ОПТЕРЕЋЕЊА ПО ЦЕЛОЈ ДУЖИНИ)
   ↓
   ОПТЕРЕЋЕЊА КОЈА СЕ ИНДИРЕКТНО ИЛИ ПОСРЕДНО ПРЕНОСЕ НА НОСАЧ (ШТАПОВИ ПРИМАЈУ ОПТ. САМО У ОДРЕЂЕНИМ ТАЧКАМА И ПРЕНОСЕ ИХ ПУТЕМ ПОПРЕЧНИХ НОСАЧА ДО ГЛАВНОГ НОСАЧА) = МОСТОВИ

2 - ПОПРЕЧНИ НОСАЧИ

Дијаграми утицаја и дијаграми екстремних вредности утицаја:

- ВРЕДНОСТИ УТИЦАЈА У НОСАЧИМА КОЈИ СУ ОПТЕРЕЋЕНИ СТАЛНИМ И ПОВРЕМЕНИМ НЕПОКРЕТНИМ ОПТ. ЗАВИСЕ САМО ОД ВЕЛИЧИНЕ ОПТЕРЕЋЕЊА, МЕЂУТИМ ВРЕДНОСТИ УТИЦАЈА УСЛЕД ПОКРЕТНОГ ОПТЕРЕЋЕЊА ЗАВИСЕ И ОД ИНТЕЗИТЕТА ОПТ. И ОД ЊЕГОВОГ ПОЛОЖАЈА НА НОСАЧУ.

- ТРЕБА УОЧИТИ РАЗЛИКУ ИЗМЕЂУ ДИЈАГРАМА УТИЦАЈА И ДИЈАГРАМА ЕКСТРЕМНИХ ВРЕДНОСТИ ТОГ УТИЦАЈА (РЕЦИМО ДИЈАГРАМА M_s И ДИЈАГРАМА $\max M_s$)
- ОРДИНАТЕ дијаграма M_s ПРИКАЗУЈУ МОМЕНТЕ У ПРЕСЕЦИМА ЗА ЈЕДАН ПОЛОЖАЈ ОПТЕРЕЋЕЊА НА НОСАЧУ.

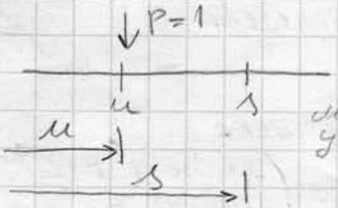
- ОРДИНАТЕ ДИЈАГРАМА $\max M_s$ ПРИКАЗУЈУ МАКСИМАЛНЕ ВРЕДНОСТИ МОМЕНАТА КОЈЕ УСЛЕД ДАТОГ ОПТЕРЕЋЕЊА МОГУ ДА СЕ ЈАВЕ, ТЕ СВАКОЈ ОРДИНАТИ ОДГОВАРА ДРУГИ ПОЛОЖАЈ ОПТЕРЕЋЕЊА.

– Највећи од EXTR утицаја у појединим пресецима називамо апсолутни max или апсолутни min тог утицаја.

– Често је за димензионисање носача довољно да се одреде само апс. max или апс. min појединих утицаја.

– Појам утицајне функције и утицајне линије:

– Утицаје у носачима услед покретног опт. одређујемо путем утицајних линија.



$Z(s,u)$ – утицај Z који јединична сила изазива на месту s.

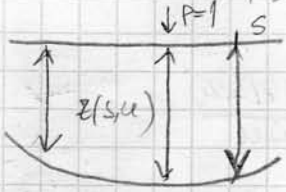
место утицаја

место у коме јединична сила делује

Ако је $s=const$ $Z(s,u)$ је функција само од u коју називамо утицајна функција за утицај Z на месту s.

Ако ову функцију прикажемо графички добијамо утицајну линију.

– Утицајне линије су праве или криве линије чији облик зависи од врсте оптерећења, врсте утицаја у носачу као и од начина преношења оптерећења (директно или посредно опт. носачи).



Најлакше ћемо разумети утицајну линију кад схватимо да је она увек везана за један пресек. !!!

– Из ње можемо срачунати утицај у пресеку s за било коју врсту оптерећења.

24. Срачунавање утицаја из утицајних линија.

1. Систем концентрисаних сила:

вредност утицаја

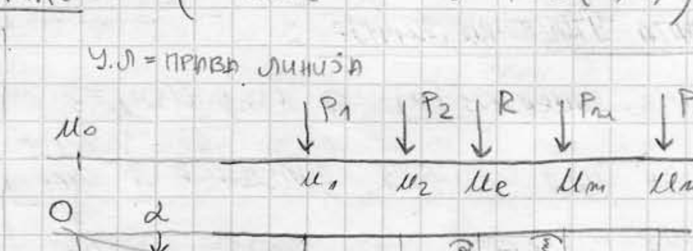
сила која делује у тачки u

$\left(\text{за једну силу}: \ Z_s = P\cdot Z(s,u)\right)$

$Z_s=\sum_{m=1}^{n} P_m\cdot Z(s,u_m)$

утицај

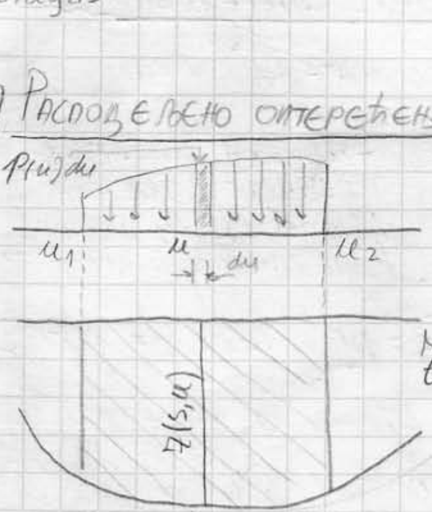
У.Л = права линија



$Z(s,u_m)=(u_m-u_0)\,tg\alpha, \quad m=1,2,\dots,n$ $\quad Z_s=tg\alpha\sum_{m=1}^{n}P_m(u_m-u_0)$

$Z_s=R(u_R-u_0)\,tg\alpha = R\,Z(s,u_R)$

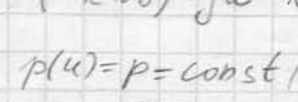
2. Расподељено оптерећење:



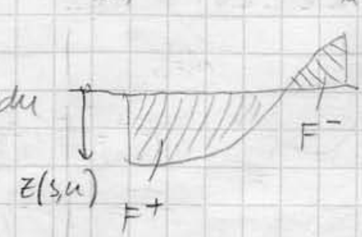
$p(u)du$ – елементарна концентрисана сила

$Z_s=\int_{u_1}^{u_2} p(u)\,Z(s,u)\,du$

$p(u)=p=const$ (једнако подељено)

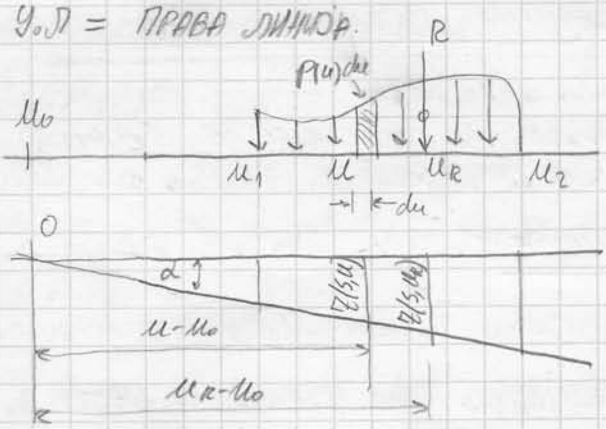


$Z_s=p\int_{u_1}^{u_2}Z(s,u)\,du=pF$



$F=F^+ + F^-$

У.Л = ПРАВА ЛИНИЈА



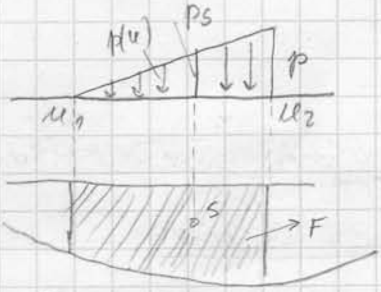
$$Z(s,u)=(u-u_0)\,tg\alpha$$

$$Z_S = tg\alpha \int_{u_1}^{u_2} p(u)(u-u_0)\,du$$

$$Z_S = R(u_R-u_0)\,tg\alpha = R\,Z(s,u_R)$$

ординате утицајне линије испод тежишта дијаграма опт.

$$R=F_p=\int_{u_1}^{u_2}p(u)\,du$$ – површина дијаграма оптерећења

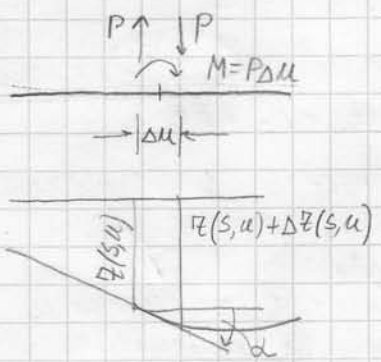


Подељено оптерећење $p(u)$ које се линеарно мења

мењамо $R=F_p$ за F и $Z(s,u_R)$ за p_S (делује на месту тежишта S утицајне површине)

$$Z_S = p_S F$$

(3.) Концентрисани момент:



Момент M замењујемо еквивалентним спрегом сила P на размаку Δu

Полазимо од $Z_S = P\,Z(s,u) \Rightarrow$

$$\Rightarrow P[Z(s,u)+\Delta Z(s,u) - Z(s,u)] = P\,\Delta Z(s,u) = M\frac{\Delta Z(s,u)}{\Delta u}$$

пошто $\Delta u \to 0$

$$Z_S = M\lim_{\Delta u\to 0}\frac{\Delta Z(s,u)}{\Delta u} = M\,Z'(s,u) = M\,tg\alpha$$

димензија ординате утицајне линије

Димензије ордината утицајних линија:

Ако утицај Z има димензију [a], из $Z_S = p\,Z(s,u) \Rightarrow$ димензија $[Z(s,u)] = \left[\frac{a}{сила}\right]$

Ординате У.Л за силу су без димензија $\left[\frac{сила}{сила}\right]$

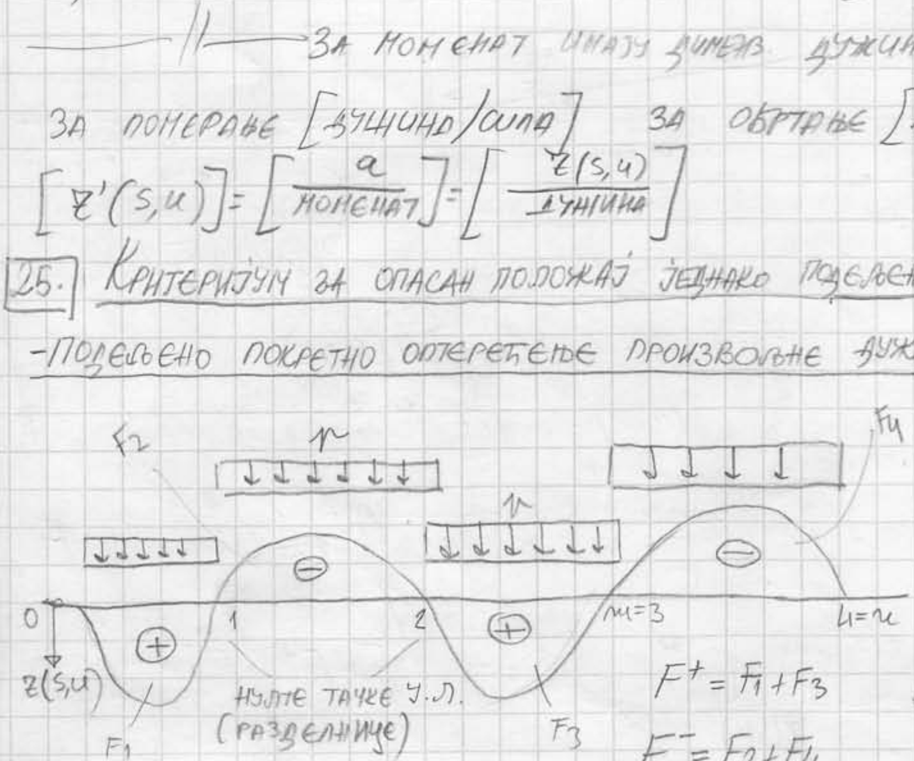
— || — за моменат имају димен. дужине $\left[\frac{сила \cdot дужина}{сила}\right] = [дужина]$

за померање [дужина/сила] за обртање [1/сила]

$$[Z'(s,u)] = \left[\frac{a}{моменат}\right] = \left[\frac{Z(s,u)}{дужина}\right]$$

25. Критеријум за опасан положај једнако подељеног покретног оптерећења:

-Подељено покретно оптерећење произвољне дужине, а ординате У.Л. мењају зн



max Z_p
min Z_p
– меродаван положај једнако подељеног оптерећења одређен је кад су познате нулте тачке У.Л. итд.

$$\max Z_p = pF^+ \quad \min Z_p = pF^-$$

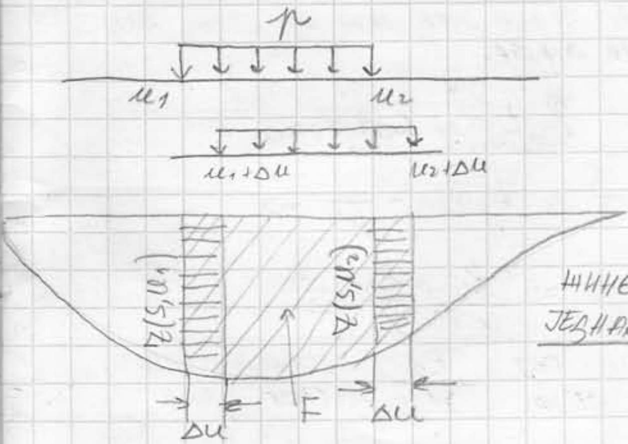
$$F^+ = F_1 + F_3$$

$$F^- = F_2 + F_4$$

Вредности утицаја у пресеку:

$$Z_p = \max Z_p + \min Z_p$$

-ЈЕДНАКО ПОДЕЉЕНО ОПТ. ОДРЕЂЕНЕ ДУЖИНЕ:



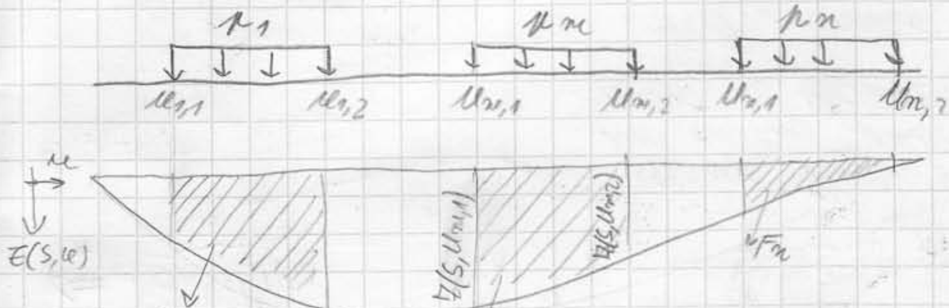
АКО ПРИ ОВОМ ПОЛОЖАЈУ $Z_S=pF$ ИМА ЕКСТРЕМНУ ВРЕДНОСТ ПРИ ПОМЕРАЊУ ОПТЕРЕЋЕЊА УЛЕВО ИЛИ УДЕСНО ЗА ВЕЛИЧИНУ Δu ПРИРАШТАЈ УТИЦАЈА ΔZ_S МОРА ДА БУДЕ НУЛА $\Rightarrow$

$\Delta Z_S = p\cdot\Delta u\left[Z(S,u_2)-Z(S,u_1)\right]=0 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ КРИТЕРИЈУМ ЗА МЕРОДАВАН ПОЛОЖАЈ $Z(S,u_1)=Z(S,u_2)$

-КАД ЈЕ ЈЕДНАКО ПОДЕЉЕНО ОПТЕРЕЋЕЊЕ КОНАЧНЕ ДУЖИНЕ У ОПАСНОМ ПОЛОЖАЈУ МОРА ДА БУДЕ ИСПУЊЕН УСЛОВ ЈЕДНАКОСТИ ОРДИНАТА УТИЦ. ЛИН. НА КРАЈЕВИМА ОПТЕРЕЋЕЊА.

-ПОКРЕТНО ОПТЕРЕЋЕЊЕ КОЈЕ СЕ САСТОЈИ ОД НИЗА ЈЕДНАКО ПОДЕЉЕНИХ ОПТ. ПРОИЗВОЉНОГ ИНТЕНЗИТЕТА И КОНАЧНИХ ДУЖИНА НА МЕЂУСОБНИМ РАЗМАЦИМА КОЈИ СЕ ТОКОМ ВРЕМЕНА НЕ МЕЊАЈУ:

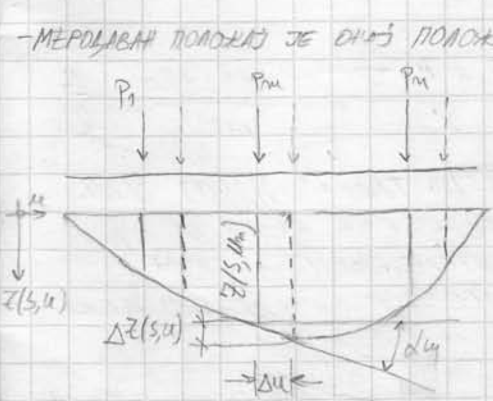


КРИТЕРИЈУМ ЗА МЕРОДАВАН ПОЛОЖАЈ:

$$\sum_{m=1}^{n} p_m Z(S,u_{m1})=\sum_{m=1}^{n} p_m Z(S,u_{m2})$$

-КРИТЕРИЈУМ ЗА ОПАСАН ПОЛОЖАЈ ПОКРЕТНОГ СИСТЕМА ВЕЗАНИХ КОНЦЕНТРИСАНИХ СИЛА КАДА ЈЕ УТИЦАЈНА ЛИНИЈА ПРОИЗВОЉНА КРИВА:

-МЕРОДАВАН ПОЛОЖАЈ ЈЕ ОНАЈ ПОЛОЖАЈ ПРИ КОМЕ НАЈВЕЋЕ СИЛЕ ДОЛАЗЕ НАД НАЈВЕЋЕ ОРДИНАТЕ УТИЦ. ЛИН.



-АКО ПРИ ОВОМ ПОЛОЖАЈУ СИЛА ВРЕДНОСТ УТИЦАЈА $Z_S=\sum_{m=1}^{n} P_m Z(S,u_m)$ ИМА ЕКСТРЕМНУ ВРЕДНОСТ, ТАДА ПРИ ПОМЕРАЊУ СИСТЕМА СИЛА УЛЕВО ИЛИ УДЕСНО ЗА ВЕЛИЧИНУ Δu ПРИРАСТ УТИЦАЈА ΔZ_S МОРА ДА БУДЕ НУЛА.

ПРИРАШТАЈ ОРДИНАТА ПРИ ПОМЕРАЊУ СИСТЕМА СИЛА: $\Delta Z(S,u_m)=\Delta u\, tg\alpha_m$

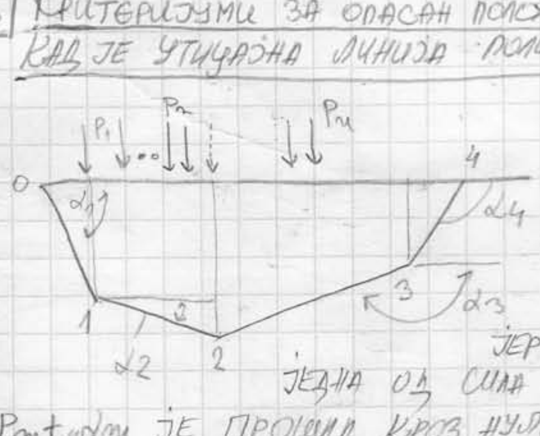
$$\Delta Z_S=\sum_{m=1}^{n} P_m \Delta Z(S,u_m)=\Delta u\sum_{m=1}^{n} P_m\, tg\alpha_m=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\sum_{m=1}^{n} P_m\, tg\alpha_m=0}$$

УСЛОВ ЗА СИСТЕМ СИЛА У МЕРОДАВНОМ ПОЛОЖАЈУ

(УСЛОВ ЗА АНАЛИТИЧКИ ЕКСТРЕМУМ ФУНКЦИЈЕ

26. КРИТЕРИЈУМИ ЗА ОПАСАН ПОЛОЖАЈ ПОКРЕТНОГ СИСТЕМА ВЕЗАНИХ КОНЦЕНТРИСАНИХ СИЛА КАД ЈЕ УТИЦАЈНА ЛИНИЈА ПОЛИГОНАЛНОГ ОБЛИКА: (ПРИЧА НЕМА МАТЕМАТИЧКУ ПОДЛОГУ)



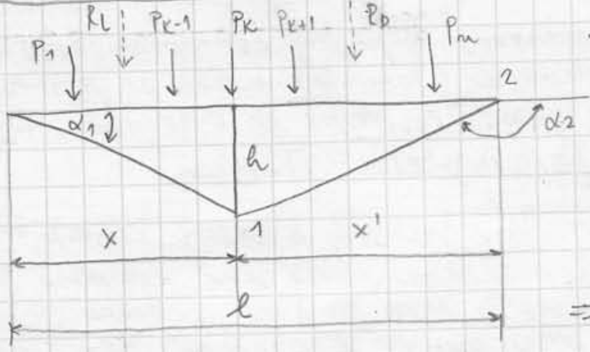
-ПОКУШАМО ДА ДОВЕДЕМО НАЈВЕЋЕ СИЛЕ НА НАЈВЕЋЕ ОРДИНАТЕ, $tg\alpha_m$ СЕ МЕЊА СКОКОВИТО.

$\sum_{m=1}^{n} P_m\, tg\alpha_m$ ИЛИ >0 ИЛИ <0 (НЕЋЕ БИТИ 0)

-АКО ПОМЕРИМО ЗА Δu НИШТА СЕ НЕЋЕ ПРОМЕНИТИ ЈЕР СИЛЕ ОСТАЈУ У СВОЈИМ ПОЉИМА, ПРОМЕНИЋЕ СЕ КАД ЈЕДНА ОД СИЛА ПРЕСКОЧИ ПОЉЕ. У ТРЕНУТКУ КАД СА ⊕ ПРЕЂЕ НА ⊖ $\sum P_m\, tg\alpha_m$ ЈЕ ПРОШЛА КРОЗ НУЛУ КАДА ЈЕ ЈЕДНА ОД СИЛА ПРЕШЛА ОД ЈЕДНОГ ТЕМЕНА У.Л. И ТА СИЛА ЈЕ МЕРОДАВНА СИЛА. ТУ МЕРОДАВНУ СИЛУ ТРЕБА ДА СТАВИМ НА ТО ТЕМЕ УТИЦ. ЛИНИЈЕ. СИСТЕМ СИЛА ЈЕ У МЕРОДАВНОМ ПОЛОЖАЈУ КАДА СЕ ЈЕДНА ОД СИЛА НАЛАЗИ ПОД ЈЕДНИМ ОД ТЕМЕНА УТИЦ. ЛИНИЈЕ.

Приказати критеријуме када је у.л. а) троугаоног облика б) трапезног облика:

а)



- За меродаван положај једна сила мора да буде над теменом утицајне линије.

$\sum_{m=1}^{n} P_m \operatorname{tg}\alpha_m = 0 \Rightarrow R_L \operatorname{tg}\alpha_1 + R_D \operatorname{tg}\alpha_2 = 0$

Са слике: $\operatorname{tg}\alpha_1 = \frac{h}{x}$ и $\operatorname{tg}\alpha_2 = -\frac{h}{x'} \Rightarrow$

$\Rightarrow R_L\frac{h}{x} - R_D\frac{h}{x'} = 0 \Rightarrow \frac{R_L}{x} = \frac{R_D}{x'} \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{R_L}{x} = \frac{R_D}{x'} = \underbrace{\frac{R_L+R_D}{x+x'} = \frac{R}{l}}_{\text{укупно просечно опт.}}$, $R=\sum_{m=1}^{n} P_m$, $\frac{R_L}{x}$ - просечно опт. левог дела, $\frac{R_D}{x'}$ - просечно опт. десног дела

Да би покретан систем сила везаних концентрисаних сила на троугаоној у.л. био у опасном положају потребно је да просечна оптерећења левог и десног дела у.л. буду међусобно једнака и једнака са укупним просечним опт.

$$\frac{R}{l} > \begin{cases} \frac{1}{x}\sum_{m=1}^{k-1} P_m \\ \frac{1}{x'}\sum_{m=k+1}^{n} P_m \end{cases} \Rightarrow$$

Критеријум за опасни положај система сила када је у.л. троугао

б)

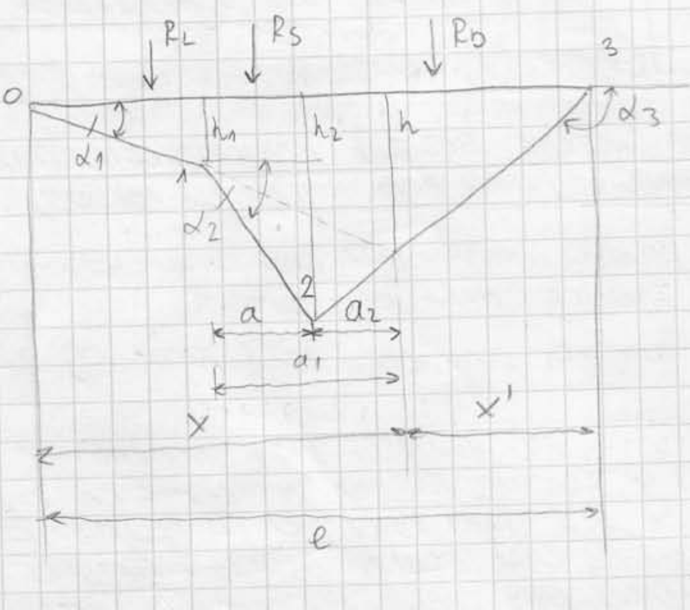
$\sum_{m=1}^{n} P_m \operatorname{tg}\alpha_m = 0 \Rightarrow R_L \operatorname{tg}\alpha_1 + R_S \operatorname{tg}\alpha_2 + R_D \operatorname{tg}\alpha_3 = 0 \overset{*}{\Rightarrow}$

$\operatorname{tg}\alpha_1 = \frac{h}{x}; \operatorname{tg}\alpha_3 = -\frac{h}{x'}$ *

$\operatorname{tg}\alpha_2 = \frac{h_2-h_1}{a} = \frac{h}{x}\frac{a_1}{a} - \frac{h}{x'}\frac{a_2}{a}$

$\overset{*}{\Rightarrow} R_L\frac{h}{x} + R_S\left(\frac{h}{x}\frac{a_1}{a} - \frac{h}{x'}\frac{a_2}{a}\right) - R_D\frac{h}{x'} = 0 \Rightarrow \underbrace{\frac{R_L+R_S\frac{a_1}{a}}{x} = \frac{R_D+R_S\frac{a_2}{a}}{x'} = \frac{R_L+R_S+R_D}{x+x'} = \frac{R}{l}}$

Да би покретан систем везаних концентрисаних сила на трапезоидној у.л. био у меродавном положају потребно је да просечно оптерећење дела x, оптерећеног са $R_L+R_S\frac{a_1}{a}$ буде једнако са просечним оптерећењем дела x' оптерећеног са $R_D+R_S\frac{a_2}{a}$ односно једнако укупном просечном оптерећењу дела l оптерећеног са $R=\sum_{m=1}^{n} P_m$.

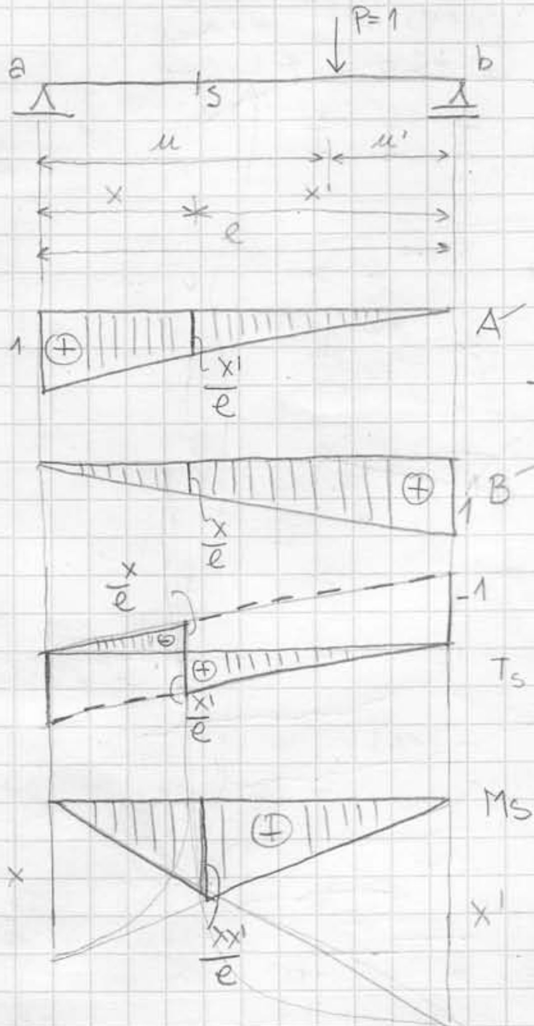


$\frac{R_L+R_S\frac{a_1}{a}}{x} = \frac{R_D-R_S\frac{a_2}{a}}{x'} = \frac{R_L+R_S+R_D}{x+x'} =$

27. Утицајне линије за силе у пресецима и реакције ослонаца директно и посредно оптерећене просте греде:

↳ најчешће примењиван носач (при вертикалном оптерећењу има вертикалне реакције)

— директно оптерећена греда



утицајна линија за реакцију ослонца a $A=\frac{u'}{l}$

$\frac{x'}{l}$ - вредност реакције A кад се у S нађе P=1.

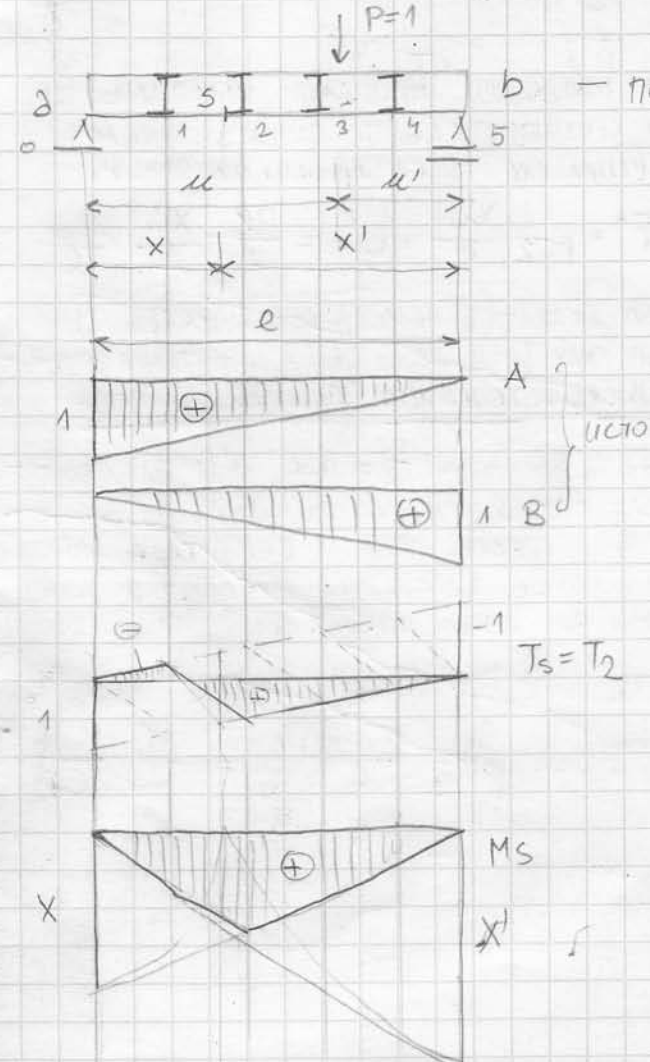
у.л. за реакцију ослонца b $B=\frac{u}{l}$

$$T_S=\begin{cases} A=\frac{u'}{l} \\ -B=-\frac{u}{l} \end{cases} \qquad M_S=\begin{cases} Ax=\frac{u'x}{l} & x<u\le l & \text{десно од } S \\ Bx'=\frac{ux'}{l} & 0\le u\le x & \text{лево од } S \end{cases}$$

за T и M имамо 2 гране јер смо секли носач у S па тако имамо 2 круте плоче тј. 2 утицајне линије.

Ординате у чворовима директ. и посредно оптерећене просте греде су исте, утицајне линије су праве дуж сваког секундарног подужног носача.

— посредно оптерећена греда



исто као за директ. опт. греду

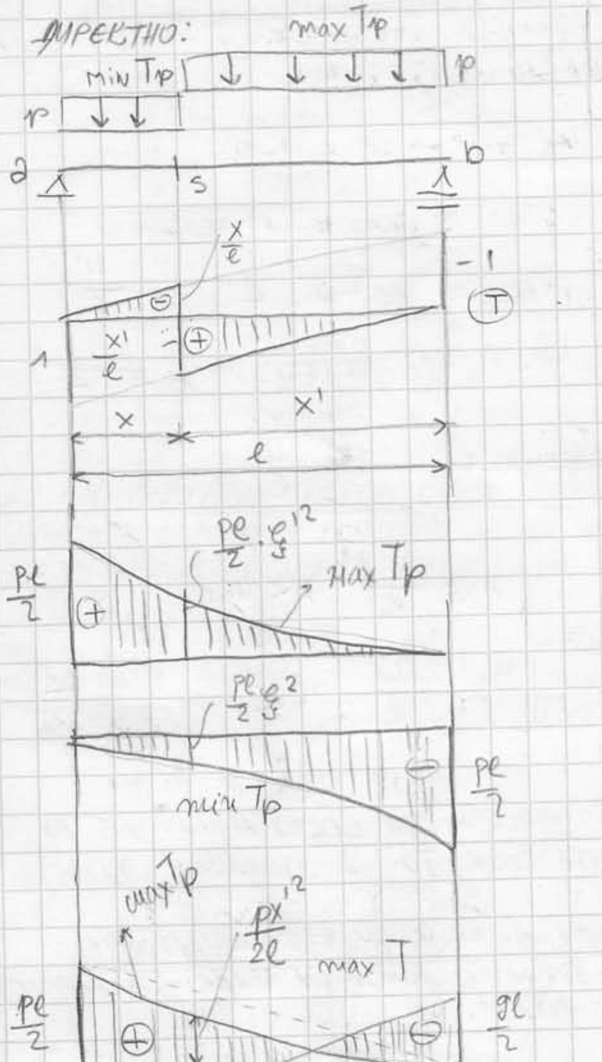
код посредно опт. п.г.

у.л. за трансверзалну силу цртамо за поље (у овом случају 1-2), а не за пресек као код директно опт. п.г.

за M_S - у.л. трапезног облика

28. Дијаграми екстремних вредности T-сила директно и посредно оптерећене просте греде услед ~~покретног система везаних~~ једнако подељеног покретног оптерећења p.

Директно:



$$\max T_p = pF^+ = p\frac{x'^2}{2l} = \frac{pl}{2}\xi'^2$$

$$\min T_p = pF^- = -p\frac{x^2}{2l} = -\frac{pl}{2}\xi^2$$

$$T_g = \frac{gl}{2}(1-2\xi) = \frac{gl}{2}\tau_k$$

$$\max T = \underbrace{T_g}_{\text{стално опт.}} + \underbrace{\max T_p}_{\text{покретно опт.}}$$

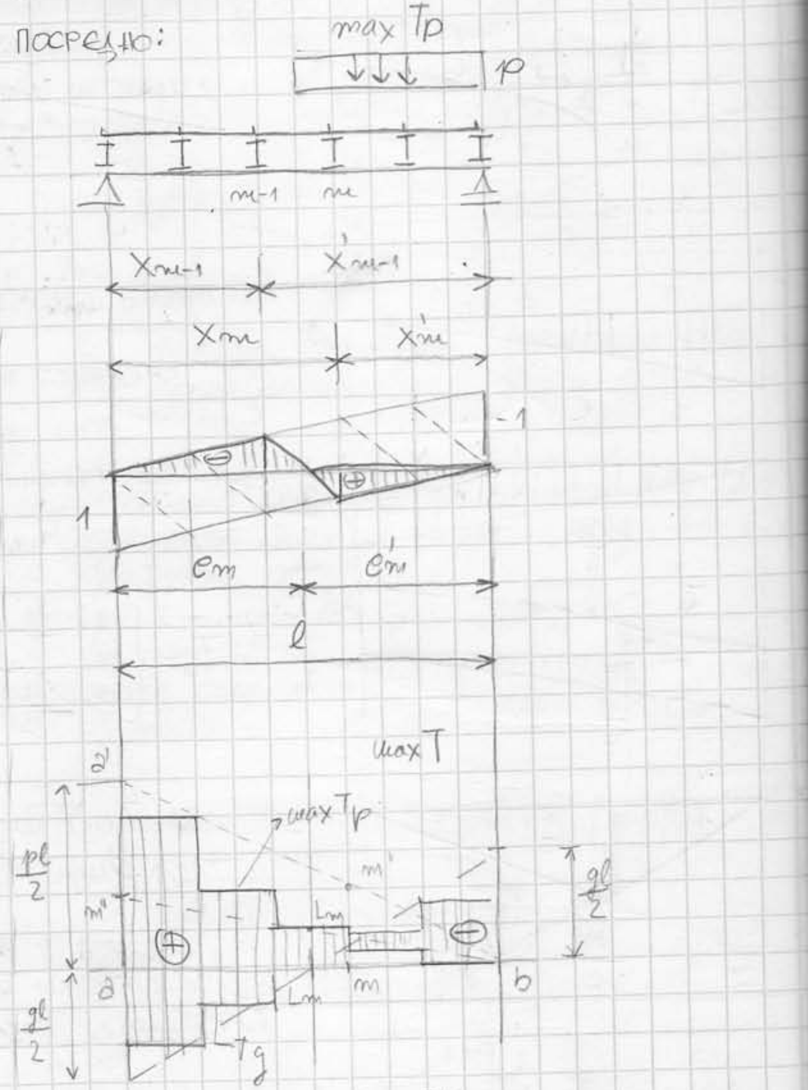
$$\max T = \frac{l}{2}\left(g\tau_k + p\xi'^2\right)$$

$$\min T = T_g + \min T_p$$

$$\min T = \frac{l}{2}\left(g\tau_k - p\xi^2\right)$$

Постоје зоне код a где су T увек (+) и зоне код b где су T увек (−)

Посредно:



Линија минималних T_s носача симетричног у односу на средину греде је слика у огледалу линије максималних T_s са промењеним знаком.

$$\max T_p = p\cdot F^+ = p\frac{1}{2}\frac{x'_m}{l}\cdot e'_m = \frac{pl}{2}\cdot\frac{x'_m}{l}\cdot\frac{e'_m}{l}$$

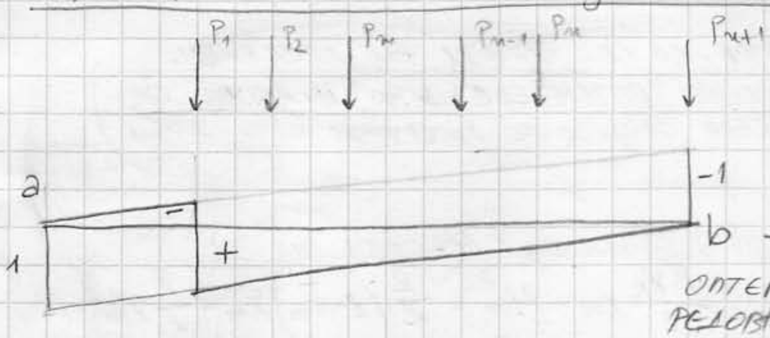
Како је ова вредност иста за све пресеке у пољу, линија $\max T_p$ у пољу је хоризонтална линија а читавог носача степенаста линија.

- Испод a нанета је дуж $\frac{pl}{2} = aa'$, $a'b$, нађено mm' и његова пројекција на $aa' = am''$. Па је спојено са b и пресек $m''b$ и вертикале добија се L_mL_m' а то је константна вредност у пољу $m\text{-}1\ m$. и тако за свако поље

$$T_g = \frac{g}{2}(l - x_{m-1} - x_m)$$

$$\min T_p = p\cdot F^- = -p\cdot\frac{1}{2}\frac{x_{m-1}}{l}\cdot e_m = -\frac{pl}{2}\cdot\frac{x_m}{l}$$

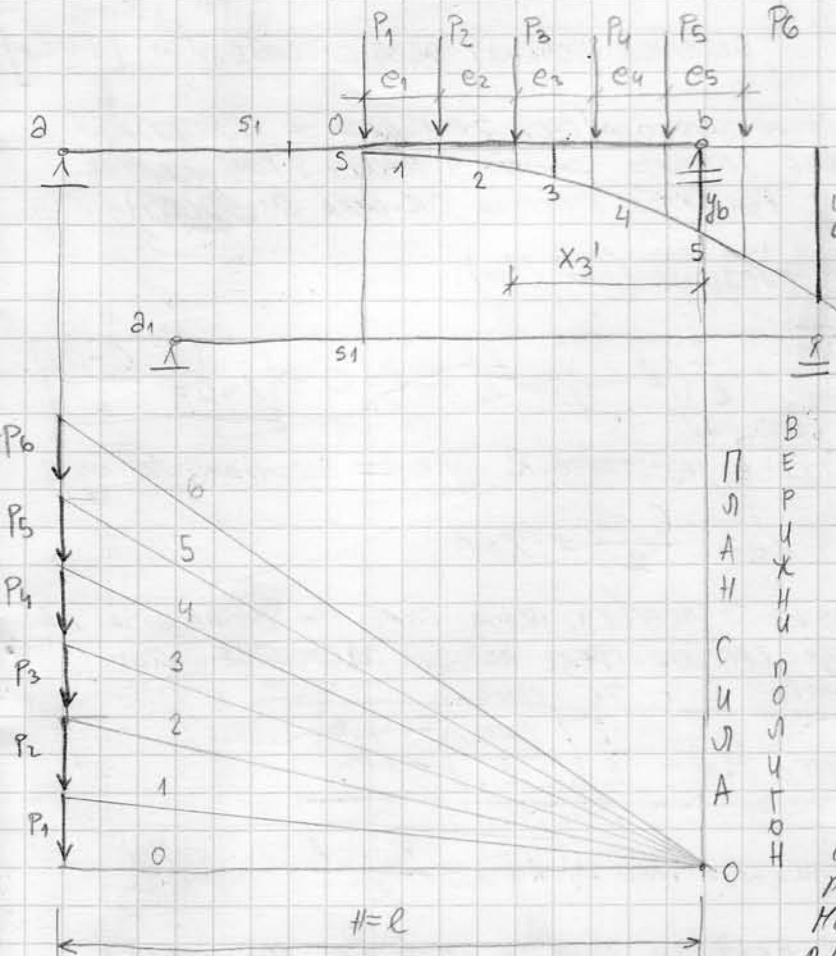
29. ДИЈАГРАМ ЕКСТРЕМНИХ ВРЕДНОСТИ T-СИЛА ДИРЕКТНО ОПТЕРЕЋЕНЕ ПРОСТЕ ГРЕДЕ УСЛЕД ПОКРЕТНОГ СИСТЕМА ВЕЗАНИХ КОНЦЕНТРИСАНИХ СИЛА (А-ПОЛИГОН)-



АКО СЕ P_1 НАЛАЗИ НАД ПРЕСЕКОМ ТО ЈЕ ОСНОВНИ (ИЛИ ПРВИ) ПОЛОЖАЈ

P_2 НАД ПРЕСЕКОМ ⇒ 2. ПОЛОЖАЈ ИТД...

- КАД ЈЕ СИСТЕМ У ОСНОВНОМ ПОЛОЖАЈУ ОПТЕРЕЋЕН ЈЕ САМО (+) ДЕО У.Л. ПА ЈЕ РЕДОВНО ТАЈ ПОЛОЖАЈ ОПАСАН.



КАД СЕ СИСТЕМ СИЛА ЗА ПРЕСЕК S НАЂЕ У 1. ПОЛОЖАЈУ T_s У ПРЕСЕКУ ЈЕ ЈЕДНАКА РЕАКЦИЈИ A: $A=\frac{1}{l}\sum P_m x'_m$ МОЖЕ ДА СЕ ОДРЕДИ ГРАФИЧ. ПУТЕМ

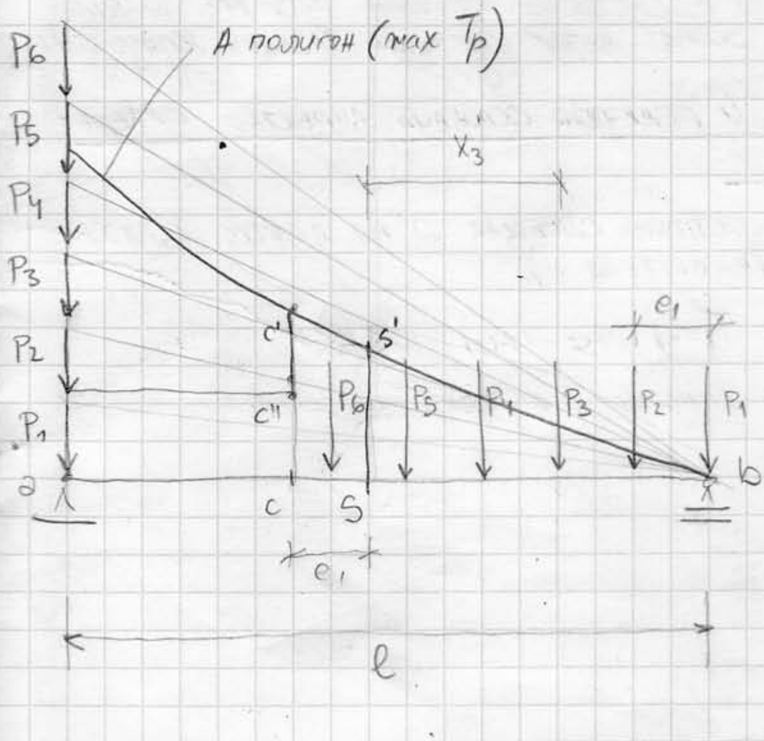
$$\underbrace{\sum P_m x'_m}_{[\text{сила}]} = \overset{\text{пол}}{H} y_b - [\text{дужина}]$$

АКО ЗА РАСТОЈАЊЕ ПОЛА УСВОЈИМО РАСПОН ГРЕДЕ: $H=l \Rightarrow y_b=\frac{1}{l}\sum P_m x'_m = A$

(ОДСЕЧАК y_b = РЕАКЦИЈИ A)

ОВО БИ ТРЕБАЛО ДА СЕ ПОНОВИ ЗА СВАКИ ПРЕСЕК, ПРИ ТОМЕ ПЛАН СИЛА ОСТАЈЕ НЕПРОМЕЊЕН, ДА НЕ БИ ПОМЕРАЛИ СИЛЕ ИЛИ НОСАЧ РАДИМО СЛЕДЕЋЕ:

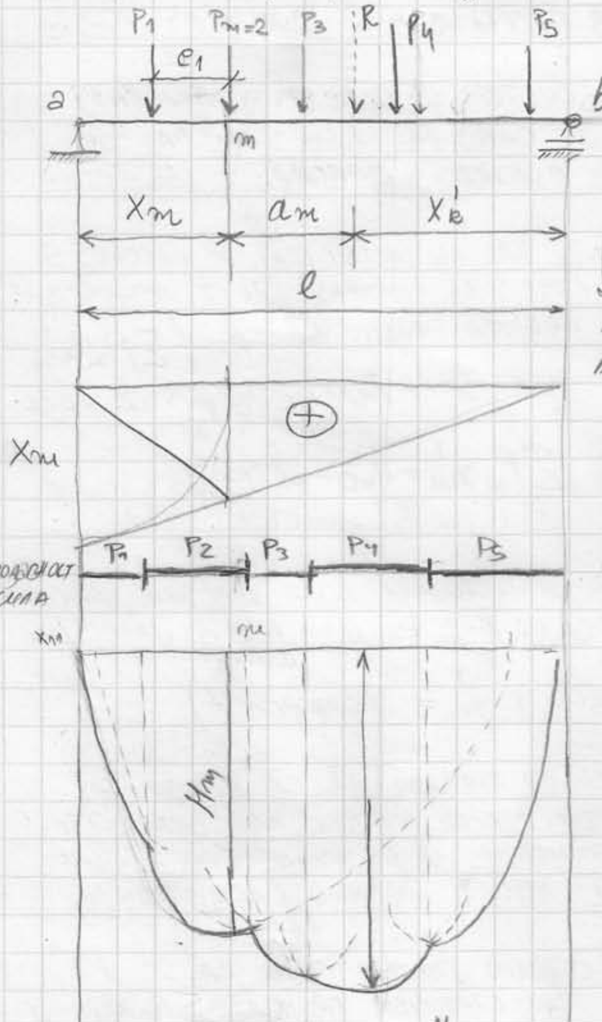
АКО ОБРНЕМО СИСТЕМ ТАКО ДА ЈЕ P_1 НАД b, СТАТИЧКИ МОМЕНТ $\sum P_m x_m$ У ОДНОСУ НА ТАЧКУ b СИЛА P_1 ДО P_5 У ПРВОМ ПОРЕТКУ ЈЕДНАК ЈЕ СТАТИЧКОМ МОМЕНТУ ИСТИХ СИЛА У ОДНОСУ НА S У ДРУГОМ ПОРЕТКУ.



$$SS' = y_b$$

30. Дијаграм екстремних вредности M_s директно оптерећене просте греде услед покретног система везаних концентрисаних сила:

-При опасном положају једна од сила мора да се налази над пресеком.
(због услова $\frac{R_l}{x} = \frac{R_d}{x'} = \frac{R_l+R_d}{x+x'} = \frac{R}{l}$ $\Leftrightarrow$ (просечно оптерећење лево и десно од пресека једнако је просечном опт. носача)



апсолутни max M_s
(јавља се услед силе која је најближа R)

Момент савијања у пресеку m:

$$M_m = \frac{R x'_R}{l} x_m - M_m^l = \frac{R}{l}(l-a_m)x_m - \frac{R}{l}x_m^2 - M_m^l$$

M_m^l - статички моменат лево од силе P_m [P_1 ...

Квадратна парабола (овом ј-ном дата је функција промене момента савијања у пресеку у коме делује сила P_m услед померања сис. сила по носачу)

Теме параболе (max M_m):

$$\frac{dM_m}{dx_m} = \frac{R}{l}(l-a_m) - \frac{2R}{l}x_{m0} = 0 \Rightarrow \boxed{x_{m0} = \frac{l-a_m}{2}}$$

Одстојање резултанте R од b = одстојању m од a

$$x'_R = \frac{l-a_m}{2} = x_{m0}$$

max M_s у пресеку испод силе P_m појављује се када средина греде полови одстојање a_m између R и те силе.

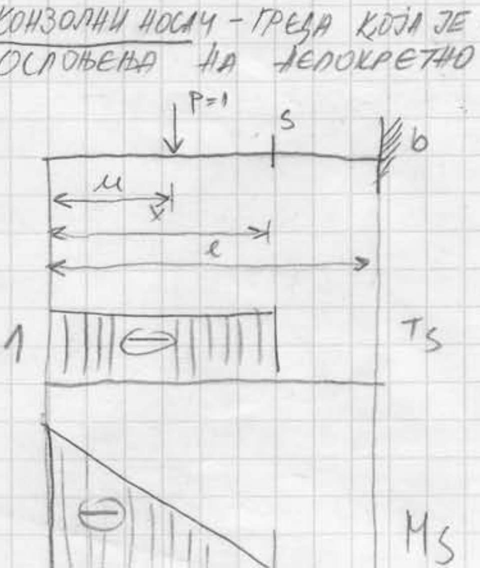
$$\boxed{\max M_m = \frac{R}{l}\left(\frac{l-a_m}{2}\right)^2 - M_m^l}$$

$$x_{m1,m2} = x_{m0} \pm \sqrt{x_{m0}^2 - \frac{M_m^l \cdot l}{R}}$$

На делу на коме је сила P_m меродавна, парабола представља дијаграм max M_s просте греде услед датог система везаних конц. сила

31. Утицајне линије за силе у пресецима и реакције ослонаца директно оптерећене конзоле и греде са препустима:

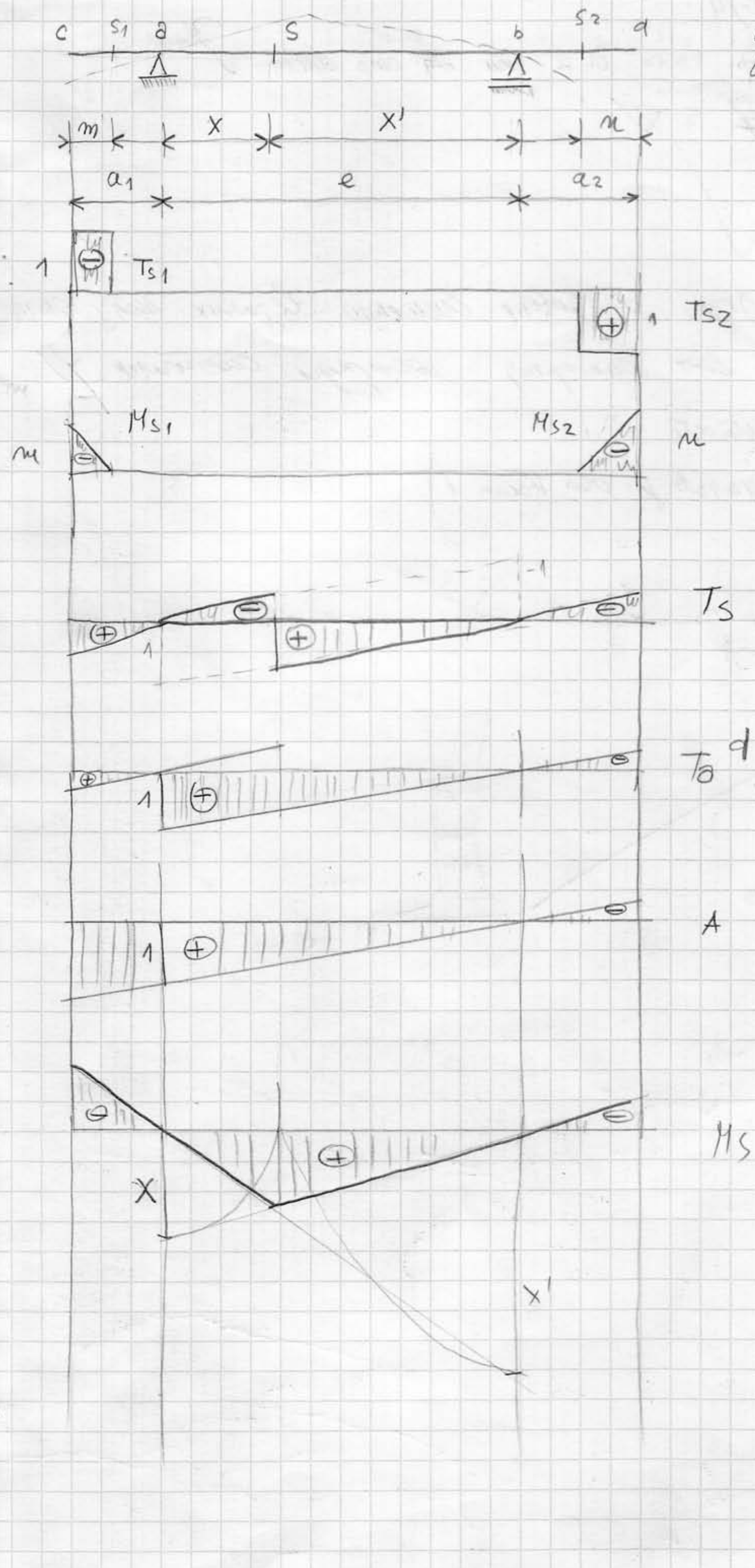
Конзолни носач - греда која је на једном крају потпуно слободна а на другом крају ослоњена на непокретно лежиште и укљештена



P лево од s: $T_s=-1$, $M_s=-(x-u)$, $0 \le u < x$

P десно од s: утицаји у пресеку су нула.

Греда са препустима — ослонци нису на крајевима



c-a и b-d у статичком смислу конзоле па ће У.Л. изгледати као за конзолни носач.

између a-b У.Л. исто као и за обичну греду, само што продужимо крајеве

сила делује од c-b нагоре, а од b-d надоле

док је сила унутар a-b мом. затеже доњу страну, кад је оптер. на препустима горња стр. је затегнута.